Talpponti háromszög és konvergens sorozatok

Az alábbiakban a háromszögek talpponti háromszögének egy tulajdonságát fogjuk igazolni. Ez vezet majd el egy bizonyos sorozat konvergenciájának felismeréséhez, végül pedig a határérték kiszámításához.

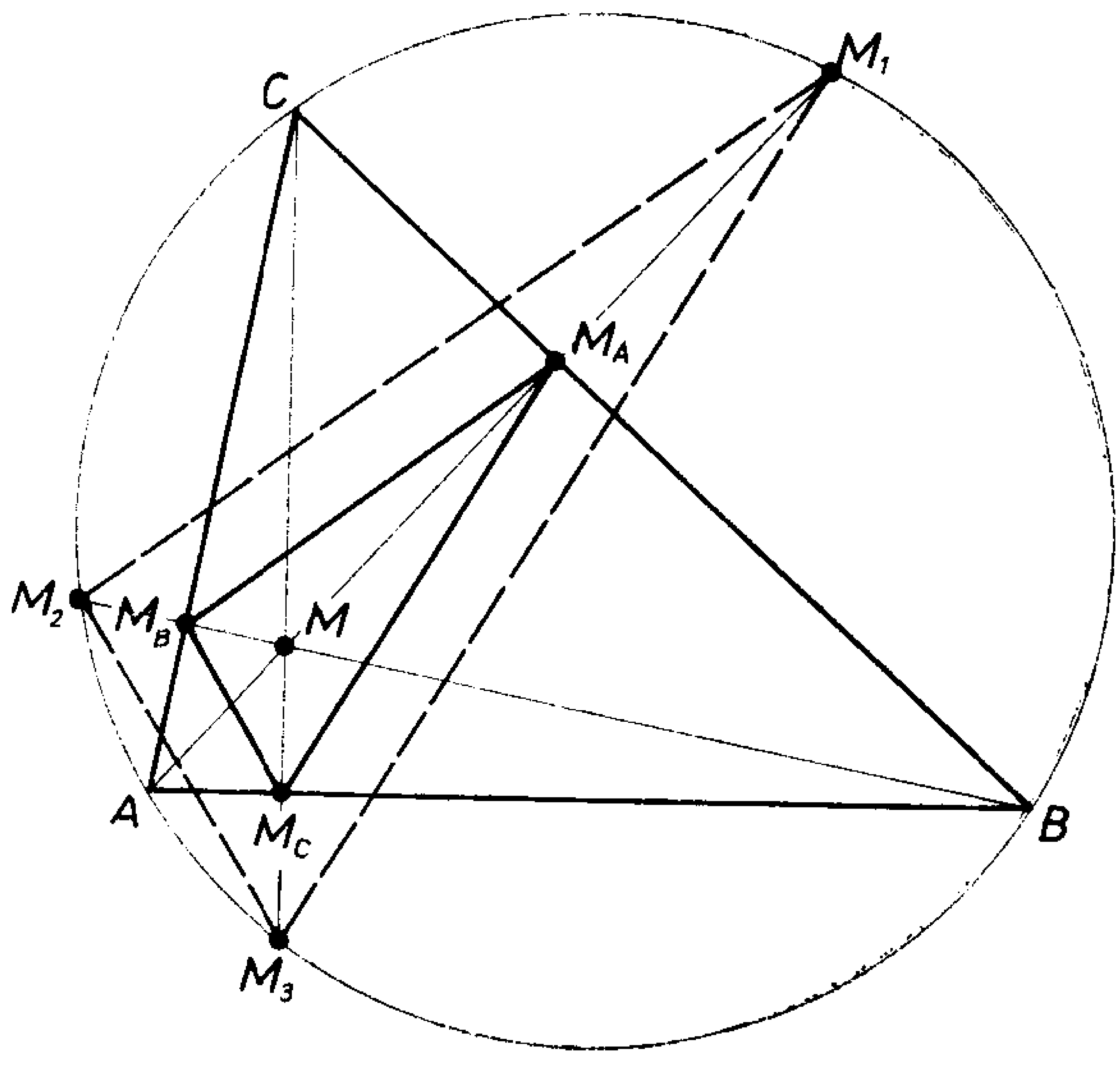
Legyen ABC hegyesszögű háromszög, oldalainak hosszúsága a, b és c. Jelöljük a háromszög köré írt kör sugarát R-rel, a háromszög területét T-vel. Ismeretes, hogy

$$T=\frac{abc}{4R}. \tag{1}$$

A háromszög magasságvonalait jelöljük AM_A, BM_B, CM_C-vel, a magasságpontot M-mel (1. ábra); legyenek a háromszög A, B, C csúcsánál lévő szögek rendre α, β, γ. Ekkor a magasságvonalak által levágott derékszögű háromszögekből

$$AMB\sphericalangle = 180°-M_AMB\sphericalangle = 180°-(90°-M_ABM\sphericalangle) =$$

$$= 90°+CBM_B = 90°+(90°-\gamma) = 180°-ACB\sphericalangle,$$



1. ábra

tehát M-nek az AB oldalra vonatkozó M_3 tükörképe a háromszög köré írt körön van, és ugyanígy e körön helyezkedik el M-nek a BC, ill. AC oldalakra vonatkozó M_1, ill. M_2 tükörképe is. A tükrözések miatt

$$MM_1 = 2 \cdot MM_A, \quad MM_2 = 2 \cdot MM_B, \quad MM_3 = 2 \cdot MM_C,$$

így az $M_A M_B M_C$ talpponti háromszöget M-ből kétszeresére nagyítva a körbe írt $M_1 M_2 M_3$ háromszöghöz jutunk. A talpponti háromszög köré írható kör R' sugara tehát

(2) $$R' = \frac{1}{2} R.$$

A talpponti háromszög oldalainak hosszúságát a koszinusztétel segítségével határozhatjuk meg; például

$$M_A M_C^2 = M_A B^2 + M_C B^2 - 2 M_A B \cdot M_C B \cdot \cos \beta =$$
$$= c^2 \cos^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ac \cos^3 \beta = (c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta) \cos^2 \beta = b^2 \cos^2 \beta,$$

azaz

(3) $$M_A M_C = b \cos \beta,$$

hasonlóan $$M_A M_B = c \cos \gamma,$$

$$M_B M_C = a \cos \alpha.$$

(1), (2) és (3) alapján az $M_A M_B M_C$ háromszög T' területére:

(4) $$T' = \frac{abc \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{2R} = 2T \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Ismeretes azonban (lásd pl. *Reiman István:* Fejezetek az elemi geometriából, 17—18. oldal), hogy egy háromszög α, β, γ szögeire

(5) $$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leqq \frac{1}{8},$$

ezért (4) és (5) miatt

(6) $$T' \leqq \frac{1}{4} T.$$

(6)-ban pontosan akkor áll egyenlőség, ha (5)-ben is egyenlőség van, ez pedig az idézett eredmény szerint csak szabályos háromszögnél következik be.

Mivel az $M_A M_B M_C$ háromszöget M-ből kétszeresére nagyítva a négyszeres területű $M_1 M_2 M_3$ háromszöghöz jutunk, ezért az utóbbi területét T''-vel jelölve, a (6) összefüggés így is írható:

(7) $$T'' \leqq T.$$

Vizsgáljuk meg, milyen eljárással lehet az $M_1 M_2 M_3$ háromszögből az eredeti ABC háromszöget visszakapni! Mivel például $AM_C C$ és $AM_A C$ közös átfogójú derékszögű háromszögek, ezért $AM_C M_A C$ húrnégyszög, tehát $AM_C M_A \sphericalangle = 180° - \gamma$. Hasonlóan $BM_C M_B C$ is húrnégyszög, azaz $BM_C M_B \sphericalangle = 180° - \gamma$, így $AM_C M_A \sphericalangle = BM_C M_B \sphericalangle$. Ebből tüstént következik, hogy a CM_C magasságvonal felezi az $M_AM_CM_B$ szöget, és így az $M_1M_3M_2$ szöget is. A kerületi szögek tétele szerint ekkor a C pont felezi az M_3 pontot nem tartalmazó M_1M_2 körívet; hasonlóan A az M_2M_3, B pedig a megfelelő M_1M_3 körív felezőpontja. Ez a következő kérdést veti fel:

Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, és legyenek rendre A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög köré írt kör (a harmadik csúcsot nem tartalmazó) BC, AC, AB íveinek a felezőpontjai. Igaz-e, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög területe legalább akkora, mint az ABC háromszögnek a területe?

Megmutatjuk, hogy a kérdésre a válasz igenlő, ugyanis $A_1B_1C_1$ hegyesszögű háromszög, amelynek a magasságpontjából kétszeresére nagyított talpponti háromszöge éppen ABC. Jelöljük az ABC háromszög szögeit α, β, γ-val (2. ábra). Mivel az $A_1B_1C_1$ szöghöz tartozó körív fele az AC körívnek, ezért a kerületi szögek tétele értelmében

$$A_1B_1C_1\sphericalangle=\frac{1}{2}AB_1C\sphericalangle=\frac{1}{2}(AB_1B\sphericalangle+BB_1C\sphericalangle)=$$

$$=\frac{1}{2}(ACB\sphericalangle+BAC\sphericalangle)=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma),$$

hasonlóan

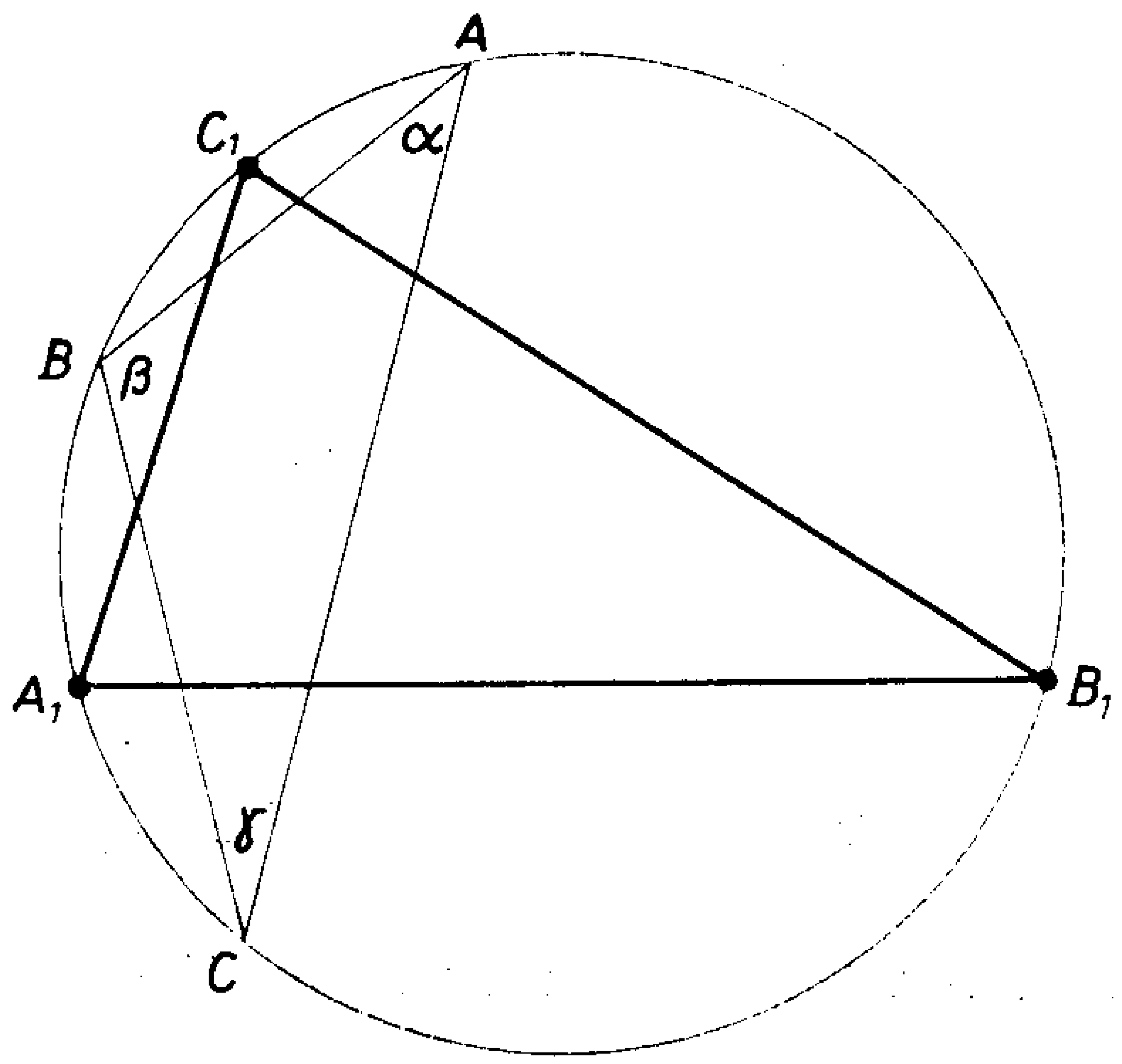
$$C_1A_1B_1\sphericalangle=\frac{1}{2}(\beta+\gamma),\quad A_1C_1B_1\sphericalangle=\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Az $\alpha+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\gamma$ szögek valamennyien kisebbek 180°-nál, így $A_1B_1C_1$ valóban hegyesszögű háromszög. Nyilván

$$A_1C_1C\sphericalangle=\frac{1}{2}BC_1C\sphericalangle=\frac{1}{2}BAC\sphericalangle=\frac{1}{2}\alpha,$$

tehát

$$A_1C_1C\sphericalangle+C_1A_1B_1\sphericalangle=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=90^0,$$



2. ábra

azaz A_1B_1 merőleges CC_1-re, ugyanígy A_1C_1 és BB_1, illetve B_1C_1 és AA_1 is merőlegesek. Ez a korábbiak szerint azt jelenti, hogy $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögét a magasságpontból kétszeresére nagyítva ABC-hez jutunk, ezért (7) miatt az ABC, háromszög területe legfeljebb akkora, mint az $A_1B_1C_1$ háromszögé. A B_1C_1, A_1C_1 A_1B_1 körívek felezőpontjai által meghatározott $A_2B_2C_2$ háromszög területe ugyanígy nagyobb (vagy egyenlő) az $A_1B_1C_1$ háromszög területénél, és legfeljebb akkora, mint a belőle hasonlóan képezett $A_3B_3C_3$ háromszögnek a területe.

Az eljárást tovább folytathatjuk, és az így egymás után keletkező $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, ... háromszögek területei egy növekvő számsorozatot alkotnak. Valamennyi háromszög területe kisebb az őket tartalmazó kör területénél; a területek sorozata tehát konvergens. Próbáljuk meg kiszámítani ezt a határértéket! A kiindulási háromszög oldalait a, b, c-vel, szögeit α, β, γ-val, a köréírt kör sugarát R-rel jelöljük. Mivel

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma,$$

ezért az ABC háromszög területe (1) alapján

$$T_0 = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

illetve ugyanígy — az $A_nB_nC_n$ háromszög α_n, β_n, γ_n szögeivel az $A_nB_nC_n$ háromszög területe

$$T_n = 2R^2 \sin\alpha_n \sin\beta_n \sin\gamma_n.$$

Az egymásra következő háromszögek képzési szabálya szerint a szögek sorozatára:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\beta_n+\gamma_n}{2}, \quad \beta_{n+1} = \frac{\alpha_n+\gamma_n}{2}, \quad \gamma_{n+1} = \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}.$$

Ennek az összefüggésnek és néhány kísérleti próbálkozásnak alapján az az érzésünk támadhat, hogy n növekedtével a szögek egyre inkább „kiegyenlítődnek”, azaz α_n, β_n és γ_n határértéke egyaránt 60°. Látni fogjuk, hogy ez valóban így is van. Valamivel általánosabban a következő állítást bizonyítjuk ehhez be:

(8) *Ha x_0, y_0, z_0 tetszőleges valós számok, és az $(x_n), (y_n), (z_n)$ sorozatokat az*

$$x_{k+1} = \frac{y_k+z_k}{2}, \quad y_{k+1} = \frac{x_k+z_k}{2}, \quad z_{k+1} = \frac{x_k+y_k}{2}$$

szabály szerint képezzük, akkor mindhárom sorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{x_0+y_0+z_0}{3} = A.$$

Vegyük észre, hogy $x_n+y_n+z_n=x_0+y_0+z_0=3A$. Ezt az n-re vonatkozó teljes indukcióval láthatjuk be; $n=0$-ra állításunk nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy $x_k+y_k+z_k=3A$, ekkor

$$x_{k+1}+y_{k+1}+z_{k+1} = \frac{y_k+z_k}{2}+\frac{x_k+z_k}{2}+\frac{x_k+y_k}{2} = x_k+y_k+z_k = 3A,$$

tehát az állítás minden k-ra fennáll. Ennek felhasználásával kapjuk, hogy

$$x_{n+1} = \frac{y_n+z_n}{2} = \frac{3A-x_n}{2},$$

így

$$A-x_{n+1}=\frac{x_n-A}{2},$$

következésképpen (minden n-re)

$$|x_{n+1}-A|=\frac{|x_n-A|}{2}.$$

Ebből az n-re vonatkozó indukcióval egyszerűen adódik, hogy

$$|x_n-A|=\frac{|x_0-A|}{2^n}.$$

Nyilván $|x_0-A|$ nem függ n-től, $1/2^n$ pedig n növekedtével 0-hoz tart, így $|x_n-A|$ határértéke is 0, azaz (x_n) határértéke A; ugyanígy bizonyítható be, hogy az (y_n), (z_n) sorozatok is A-hoz tartanak.

A bizonyított (8) állítás felhasználásával az $A_nB_nC_n$ háromszögek területének határértéke már igen könnyen kiszámítható. (8) miatt ugyanis $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=60°$, ezért a szinuszfüggvény folytonossága miatt — a háromszögek területének határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}2R^2\sin\alpha_n\sin\beta_n\sin\gamma_n=2R^2(\sin 60°)^3=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

A (8) állítás bizonyításának mintájára könnyen igazolhatjuk (8) következő általánosítását:

(9) *Legyenek* $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_1^{(k)}$ *tetszőleges valós számok, és képezzük az* $(a_n^{(1)})$, $(a_n^{(2)}), \dots, (a_n^{(k)})$ *sorozatokat az*

$$a_{n+1}^{(l)}=\frac{1}{k-1}\left(-a_n^{(l)}+\sum_{i=1}^{k}a_n^{(i)}\right)$$

szabály szerint ($l=1,2,\dots,k$). *Ekkor az* $(a_n^{(l)})$ *sorozatok konvergensek, és közös határértékük:*

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{(l)}=\frac{1}{k}\cdot\sum_{i=1}^{k}a_1^{(i)}.$$

A (9) állításból az $a_1^{(1)}=a_1$, $a_1^{(2)}=a_1^{(3)}=\dots=a_1^{(k)}=a_2$ speciális eset révén a következőt bizonyíthatjuk be:

(10) *Ha* a_1 *és* a_2 *valós számok és* k *2-nél nagyobb pozitív egész, akkor az*

$$a_n=\frac{a_{n-2}+(k-2)a_{n-1}}{k-1}\quad(n=3,4,5,\dots)$$

rekurzióval képezett (a_n) *sorozat konvergens, és a határértéke:*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a_1+(k-1)a_2}{k}.$$

Hausel Tamás
Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.