Geometriai kvantálás és a Jones-Witten-elmélet
1997-es fizikus nyári iskola

Hausel Tamás*†

Óbánya 1997. július 12-25.

Barnaföldi Gergely[1] előadás jegyzeteinek és Etesi Gábor[2] értékes megjegyzéseinek felhasználásával

*A jegyzet megírása közben az NSF DMS 97-29992 számú ösztöndíjának támogatását élveztem a princetoni Institute for Advanced Study-ban.

†hausel@math-inst.hu

[1] bgergely@cs.elte.hu

[2] etesi@math-inst.hu

Tartalom

1 Bevezetés

Az előadás sorozat célja, hogy betekintést nyerjünk a Jones-Witten elméletbe, miközben áthajózunk a szimplektus geometria, a geometriai kvantálás és a topologikus kvantummező elméletek vizein.

Jones 1984-ben definiálta híres láncinvariánsát az úgynevezett Jones-polinomot, amelynek segítségével a csomóelmélet néhány 100 éves sejtését sikerült tisztázni. Atiyah 1988-as Hermann Weyl-előadásában vetette fel a problémát: Hogyan konstruáljuk meg a Jones-polinomot – amelyet addig csak a lánc két dimenziós diagramjával tudtak definiálni – tisztán három dimenziós módszerekkel? Witten 1989-ben válaszolta meg a kérdést, amely egyebek mellett hozzájárult ahhoz, hogy 1990-ben, Jones mellett, fizikusként először Fields-érmet kapott. Witten igen eredeti módon egy 2+1-dimenziós topologikus kvantummező elméletet (TKME[3]) konstruált, amelynek 3-dimenziós részéből kiolvasható a Jones-polinom. Ez a TKME a fizikus körökben már ismert Chern-Simons-elmélet — mellyel ábeli esetben például a szupravezetést lehet modellezni — amelyet a fenti történet miatt Jones-Witten elméletnek is nevezünk.

A topológus Freedman 1998-as ICM előadásában pontosan ezt a Jones-Witten elméletet javasolta egy újfajta számítógép technológia alapjának. Javaslata szerint, ha a Chern-Simons elméletet, valamely fizikai elmélet modelljét, hatékonyan mérni tudnánk, akkor ez az újfajta számítógép igen hatékonyan tudná számolni a Jones-polinomot, ami Witten fenti eredménye szerint, korrelácios függvények formájában "kimérhető" az elméletből. A Jones-polinom számolásárol pedig ismert, hogy egy NP-nehéz feladat, tehát egy számítógép, amely a Jones-polinomot hatékonyan számolja, minden NP-teljes problémát hatékonyan tud megoldani. Ez a lehetőség egyébként annyira megmozgatta még a Microsoft fantáziáját is, hogy a 4-dimenziós sokaságok osztályozásáért 1986-ban Fields érmet kapó Freedmant szerződtette frissen alakult matematikai kutató csoportja egyik irányítójának.

Az elkövetkező előadásokban a witteni konstrukció matematikai alapjait fogjuk áttekinteni.

Megjegyzés. A téma jellegéből adódik a fizikai és matematikai megközelítés keveredése, ami igen nehézzé teszi az előadások tálalását. Minthogy a célunk csupán a betekintés, ezért nem bizonyítjuk itt a tételeket, ezeket az érdeklődő Olvasó a megadott irodalomban megtalálja. Továbbá motivációnk sokszor fizikai gyökerű, tehát a tárgyalás stílusa nem a matematikában megszokott szigorú logikai lépések egymásutánja. A hangsúly nem is a fizikán van. Hanem egyik oldalról a "tiszta matematikán", amit a fizikai motiváció eredményez, a másik oldalról pedig a legújabb elméleti fizikai ötletek konzisztenciájának, a kisérletek lehetőségének hiányában, a modern geometriában történő tesztelésén.

[3] TQFT a szakirodalomban.

2 A klasszikus mechanika matematikai modelljei

E fejezetben [Arn] -ot követve[4] a klasszikus mechanika három matematikai modelljét definiáljuk. A newtoni modell a differenciálszámítás, a lagrange-i modell a variációszámítás, a hamiltoni modell pedig a szimplektikus geometria matematikai apparátusára épül.

2.1 Newton-féle mechanika

Definíció. Az n pontból álló Newton-féle mechanikai rendszer

• *konfigurációs tere* egy $N = 3n$-dimenziós euklideszi tér: $M = \mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3}_{n}$

• *mozgása* egy olyan $\gamma : I \to M = \mathbb{R}^N$ sima leképezés, ahol $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum és amelyre teljesül a rendszer

• *mozgásegyenlete*

$$\ddot{\gamma} = F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t),$$

ahol

$$F : TM \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$$

sima függvény.

A γ mozgás $t_0 \in int(I)$-beli

• *sebességvektora*: $\dot{\gamma}(t_0) = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{t=t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h} \in \mathbb{R}^N$,

• *gyorsulásvektora*: $\ddot{\gamma}(t_0) = \left(\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)_{t=t_0}$.

Megjegyzés. Matematikailag egy Newton-féle mechanikai rendszert az F függvénnyel adunk meg.

Példa. A következőkben definiáljuk a konzervatív rendszert.

Legyen $r_i = (x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}) \in \mathbb{R}^3$ az i. tömegpont koordinátái, ekkor az $M = \mathbb{R}^N$ euklideszi tér $(r_1, \ldots, r_n)$-nel illetve $(x_1, \ldots, x_N)$-nel van koordinátázva. Továbba legyen a konfigurációs tér $TM = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ érintőtere $(r_1, \ldots, r_n, \dot{r}_1, \ldots, \dot{r}_n)$-nel illetve $(x_1, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N)$-nel koordinátázva, ahol $\dot{r}_i = (\dot{x}_{3i-2}, \dot{x}_{3i-1}, \dot{x}_{3i}) \in \mathbb{R}^3$. Legyenek továbbá $m_1, \ldots, m_n$ pozitív valós számok, ahol m_i az i. pont *tömege*, illetve $U : M = \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sima függvény, melynek neve *potenciál függvény.* Ekkor legyen

$$grad(U) = \frac{\partial U}{\partial r} = \left(\frac{\partial U}{\partial r_1}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial r_n}\right)$$

illetve

$$F = -\frac{1}{m} \cdot grad(U) = \left(-\frac{1}{m_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial r_1}, \ldots, -\frac{1}{m_n} \cdot \frac{\partial U}{\partial r_n}\right).$$

Ily módon F egy $M \to \mathbb{R}^N$ függvény. Levetítve az M faktorra: $TM \times \mathbb{R} \to M$, látjuk, hogy F definiál egy Newton-féle mechanikai rendszert, melynek neve *konzervatív rendszer.* Ekkor a newtoni mozgásegyenletek az

$$m_i \ddot{\gamma}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} \circ \gamma_i \tag{1}$$

alakot öltik, ahol $i = 1, \ldots, n$ és $\gamma_i = r_i \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ az i. pont mozgása. Tehát a γ görbe mentén teljesül az

$$m_i \ddot{r}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} \quad i = 1, \ldots, n$$

differenciál egyenlet rendszer.

[4] Részletesebb tárgyalásért lásd [Arn]-ot.

A konzervatív rendszer *kinetikus energiá*ja a

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{r_i}^2,$$

ahol $r_i \in \mathbb{R}^3$, $r_i^2 = x_{3i-2}^2 + x_{3i-1}^2 + x_{3i}^2$ az r_i vektor hosszának négyzete. A konzervatív rendszer *totális energiá*ja a $E = T + U : TM \to \mathbb{R}$ sima függvény. Ezen definíciók mellett a rendszer totális energiája időben állandó, azaz megmarad, hiszen

$$\dot{E} = \dot{T} + \dot{U} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i + grad(U) = 0.$$

2.2 Lagrange-féle mechanika

2.2.1 Variációszámítás

Definíció. Jelölje $\mathcal{G}$ a $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$, sima görbék egy halmazát. Ekkor egy $\Phi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ leképezést funkcionálnak nevezünk. A Φ funkcionál differenciálható a $\gamma \in \mathcal{G}$ -nél, ha teljesül, hogy:

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = \partial\Phi(\gamma, h) + M(\gamma, h),$$

ahol:

- h a *variáció*, hogy $h \in \mathcal{G}$, és $\gamma + h \in \mathcal{G}$ a pontonkénti összeadással definiált,
- $\partial\Phi$ lineáris h-ban, azaz: $\partial\Phi(h) + \partial\Phi(h') = \partial\Phi(h + h')$,
- $M(\gamma, h) = \mathcal{O}(h^2)$, azaz $|h| < \varepsilon$ és $\left|\frac{dh}{dt}\right| < \varepsilon$ esetén $|M| < c\varepsilon^2$.

A $\gamma \in \mathcal{G}$ görbe a Φ funkcionál *extremálisa*, ha Φ differenciálható γ-ban, és $\forall h \in \mathcal{G}$ esetén teljesül, hogy: $\partial\Phi(\gamma, h) = 0$.

Példa. 1. Ha

$$\mathcal{G} := \{\gamma : I \to \mathbb{R}^N, \text{sima görbe, és } I \subset \mathbb{R}\}$$

akkor

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{\gamma}^2}\, dt,$$

a "grafikon hossza" funkcionál.

2. Legyen

$$\mathcal{G} := \{\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^N, \text{sima görbe, úgy, hogy: } \gamma(t_0) = x_0, \gamma(t_1) = x_1\},$$

továbbá legyen $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sima függvény, amelyet *Lagrange-függvénynek* mondunk, ekkor $\forall \gamma \in \mathcal{G}$ mellett értelmes a

$$\Phi_L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)\, dt$$

funkcionál, amelyet *hatásintegrálnak* nevezünk.

1. Tétel. *Egy $\gamma \in \mathcal{G}$ görbe akkor és csak akkor extremálisa a fenti Φ_L funkcionálnak, ha γ mentén teljesül a*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

ún. Euler-Lagrange-egyenlet*, ahol:*

•$\frac{\partial L}{\partial x} = \mathrm{Pr}_1 \circ grad(L)$,

•$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \mathrm{Pr}_2 \circ grad(L)$,

ahol a $\mathrm{Pr}_1 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *vetítés az első* $x = (x_1, \dots, x_N)$*-el koordinátázott,* $\mathrm{Pr}_2 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *a második* $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$*-el koordinátázott* $\mathbb{R}^N$ *faktorra. A* $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ *mennyiséget az i.* általánosított impulzusnak, *míg az* $F_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}$ *mennyiséget az i.* általánosított erőnek nevezzük.

Példa. Tekintsük a 2.1 alfejezetben definiált konzervatív rendszert. Legyen $L = T - U \circ Pr_1$ Lagrange-függvény a munka függvény. A $\Phi_L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)dt$ hatásintegrál pedig a γ mentén végzett munka. Ekkor az Euler-Lagrange-egyenlet

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = m_i.\ddot{r}_i + \frac{\partial U}{\partial r_i},$$

ekvivalens a (1) newtoni mozgás egyenlettel. Tehát egy γ görbe akkor és csak akkor mozgása a konzervatív newtoni rendszernek, ha γ extremálisa a Φ_L hatásintegrálnak. Ez a *Hamilton-féle legkisebb hatás elve.*

2.2.2 A Lagrange-féle dinamikai rendszer definíciója

Definíció. A Lagrange-féle mechanikai rendszer

- *konfigurációs tere* egy M sima sokaság;
- *szabadsági fokainak száma* $\dim(M)$, M dimenziója;
- *Lagrange-függvénye* egy $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sima függvény
- *hatás integrálja* $\Phi_L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)dt$ alakú;
- *mozgása* olyan $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ görbe, amelyen Φ_L extremális.

Definíció. A fenti adatokkal adott Lagrange-féle dinamikai rendszert

• *autonómnak* nevezzük, ha az L Lagrange-függvény időfüggetlen,

• *természetesnek* nevezzük, ha a Lagrange-függvény egy M-en adott Riemann metrikából[5] és $U : M \to \mathbb{R}$ sima potenciálfüggvényből számítható a következőképpen: A kinetikus energiát az $x \in M$ és $v \in T_xM$ pontban a $T(x, v) = \frac{1}{2}.g_x(v, v)$,formulával definiáljuk. A Lagrange-függvény pedig $L = T - U$ alakú. Minthogy az így definiált L időfüggetlen, látjuk, hogy egy természetes rendszer autonóm.

Példa. 1. Tegyük fel, hogy egy $m_1, \dots, m_n$ tömegű $r_1, \dots r_n$ helyzetvektorú pontok rendszerét valamely kényszerfeltétel[6] egy $M \subset \mathbb{R}^{3n}$ m-dimenziós részsokaságon tartja, úgy hogy a rendszer dinamikáját az $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i^2 - U$ Lagrange-függvény írja le, ahol $U : M \to \mathbb{R}$ valamely sima potenciál függvény. Egy ilyen rendszert $3n - m$ *holonóm kényszerfeltétellel korlátozott n-pontú* rendszernek nevezünk. Ez a "természetben" leggyakrabban előforduló példa természetes Lagrange-féle dinamikai rendszerre. Innen az elnevezés.

2. Gömbinga esetében a konfigurációs tér az $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, a 2-dimenziós szféra, síkingánál, a $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ körvonal, míg kettős ingánál egy tórusz, azaz: $S^1 \times S^1 = T^2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a konfigurációs tér.

Feladat. *Mi egy két végén rögzített* 3 *csuklóval összekötött* 4 *rúdból álló rendszer konfigurációs tere?*

Megjegyzés. Megmutatható, hogy a természetes Lagrange-féle dinamikai rendszer mozgásai 0 potenciál esetén pontosan az M Riemann sokaság geodetikusai.

[5] Ez egy g_x euklideszi forma T_xM-en, amely x-ben simán változik.

[6] Például rúdak a tömegpontok között.

2.3 Hamilton-féle mechanika

2.3.1 Legendre-transzformáció

Definíció. Ha az $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sima függvény konvex, azaz a függvény Hessiánja $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ pozitív definit; akkor az f függvény *Legendre-transzformált*jának nevezzük azt a $g : \left(\mathbb{R}^N\right)^* \to \mathbb{R}$ leképezést, amelyre teljesül, hogy $\forall \xi \in \left(\mathbb{R}^N\right)^*$-re

$$g(\xi) := \max_{x \in \mathbb{R}^N} \{(\xi \mid x) - f(x)\}.$$

A Legendre-transzformáció tulajdonságai: 1. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex függvény $g : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ Legendre-transzformáltja szintén konvex és g Legendre-transzformáltja pedig f. Azaz a Legendre-transzformáció *involutív.*

2. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $A = (a_{ij})$ pozitív definit mátrixú kvadratikus forma, azaz

$$f = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j.$$

Ekkor f konvex és Legendre-trandszformáltja

$$g = \sum_{i,j} b_{ij} \xi_i \xi_j$$

pedig egy $B = (b_{ij})$ mátrixú kvadratikus forma, melyre $B = A^{-1}$, és így pozitív definit.

2.3.2 Hamilton-egyenletek

Legyen $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a Lagrange-függvény, úgy, hogy $x \in \mathbb{R}^N$ és $t \in \mathbb{R}$ mellett legyen $L_{x,t} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ konvex[7], ekkor a $H_{x,t} : \left(\mathbb{R}^N\right)^* \to \mathbb{R}$ jelöli az $L_{x,t}$ függvény Legendre-transzformáltját. Az ily módon nyert $H : \mathbb{R}^N \times \left(\mathbb{R}^N\right)^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *Hamilton-függvénynek* hívjuk. A következő tétel, az Euler-Lagrange-egyenlet Legendre-transzformációját írja le:

2. Tétel. *Az Euler-Lagrange-egyenlet ekvivalens az alábbi $2n$ darab elsőrendű differenciálegyenlettel, az úgy nevezett* Hamilton-egyenletekkel*:*

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \tag{3}$$

minden $0 < i \leq n$-re; ahol $q_i = x_i$ a pozicíció, $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ az impulzus koordináták.

3. Következmény. *A Lagrange-féle mechanikai rendszer dinamikája leírható a Hamilton-egyenletekkel.*

2.3.3 Szimplektikus geometria

Eme alfejezetben a szimplektikus geometria alapvető fogalmait ismertetjük, a hamiltoni mechanika matematikai megalapozása végett.

Egy szimplektikus sokaság, hasonlóan a későbbiekben definiálandó komplex és Kähler sokaságokhoz, egy differenciálható sokaság extra struktúrával. Egy extra struktúra definiálása egy differenciálható sokaságon három szinten történik: infinitézimális, lokális és globális szinten. Azaz először infinitézimálisan a $p \in M$-beli T_pM érintőtéren, tehát a lineáris algebra felségvizein, másodjára lokálisan a $p \in M$ pont körül, tehát lényegében $\mathbb{R}^n$-en, és végül globálisan az egész M fölött.

[7] Például ha a rendszer természetes, akkor $L_{x,t}$ egy pozitív definit kvadratikus alak, és így konvex.

A szimplektikus sokaság infinitézimális modellje a szimplektikus vektortér. Mielőtt tovább megyünk, az Olvasó elevenítse fel a Matolcsi 2.3 fejezetben a szimplektikus vektortérről olvastakat!

Most meghatarázzuk mit értünk majdnem szimplektikus sokaságon.

Definíció. Az (M, ω) párt *majdnem szimplektikus sokaság*nak nevezzük, ha M differenciálható sokaság és $\omega \in \Omega^2(M) = \Gamma(M, \Lambda^2(T^*M))$ egy differenciálható 2-forma, úgy hogy (ω_p) nem elfajuló bilineáris forma T_pM-en minden $p \in M$-re.

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a fenti definíció ekvivalens azzal, ha $\forall p \in M$-re adott a (T_pM, ω_p), p-ben simán változó szimplektikus vektortér-struktúra T_pM-n.

Példa. Legyen az $\mathbb{R}^{2n} = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ euklideszi téren az ω differenciálható 2-forma az

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$$

formulával adva. Ez nem más, mint a konstans kanonikus szimplektikus vektortér-struktúra $\mathbb{R}^{2n} = T_p\mathbb{R}^{2n}$-en s így az előző definíció értelmében $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ egy majdnem szimplektikus sokaság. Ezt a majdnem szimplektikus sokaságot hívjuk a szimplektikus sokaságok "standard modelljének".

Definíció. Egy (M, ω) majdnem szimplektikus sokaság *integrálható*, ha lokálisan izomorf[8] a standard modellel, azaz minden $p \in M$ pontnak van olyan nyílt $U \subset M$ környezete, hogy $(U, \omega|_U)$ izomorf a standard modell egy nyílt részével.

4. Tétel. **[Darboux]** *Egy (M^{2n}, ω) majdnem szimplektikus sokaság akkor és csak akkor integrálható, ha teljesül a Darboux-féle integrálhatósági feltétel: $d\omega = 0$.*

Megjegyzés. A tétel egyik iránya könnyen látható, ugyanis, ha (M, ω) egy szimplektikus sokaság, akkor a fenti definíció szerint lokálisan izomorf a standard modellel, amelyre viszont $d\omega = d\left(\sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i\right) = 0$, hiszen $d^2 = 0$.

Szimplektikus sokaságnak egy integrálható, majdnem szimplektikus sokaságot nevezünk. A Darboux tétel szerint, ezzel a definícióval ekvivalens a következő:

Definíció. Az (M, ω) pár egy *szimplektikus sokaság*, ha M differenciálható sokaság, $\omega \in \Omega^2(M)$ egy differenciálható 2-forma, amely sehol nem elfajuló, és $d\omega = 0$.

5. Következmény. *Egy (M, ω) szimplektikus sokaság minden $p \in M$ pontja körül léteznek lokális $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ koordináták, melyekkel $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$ alakú.*

Példa. 1. A $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ standard modell nyilván egy szimplektikus sokaság.

2. Legyen Q egy sima sokaság. (Például gondolhatunk Q-ra, mint egy Lagrange-féle mechanikai rendszer konfigurációs terére.) Megmutatjuk, hogy Q koérintő nyalábja T^*Q szimplektikus sokaság, egy kanonikus ω szimplektikus formával. Először konstruálunk egy úgynevezett *szimplektikus potenciált*, azaz egy θ differenciálható 1-formát, melyre $d\theta = \omega$. A konstruálandó $\theta \in \Omega^1(T^*Q)$ szimplektikus potenciál neve: *Liouville 1-forma.* Egy differenciál 1-forma egy sokaságon valójában csak a koérintőnyalábnak a szelése: $\theta \in \Gamma(T^*Q, T^*(T^*Q))$. Ahhoz hogy ezt definiáljuk elég, ha megmondjuk, hogy egy tetszőleges $X \in \Gamma(T^*Q, T(T^*Q))$ vektormezőn kiértékelve, mely sima függvényt kapjuk. A következő formula tehát definiálja a Liouville 1-formát:

$$(\theta \mid X)_{q,p} = p(T\pi(X))(q), \tag{4}$$

ahol $q \in Q$, $p \in T_q^*Q$ és $T\pi : \Gamma(T^*Q, T(T^*Q)) \to \Gamma(Q, TQ)$ a $\pi : T^*Q \to Q$ vetítés deriváltja.

[8] Más szóval majdnem szimplektikus struktúrát tartóan diffeomorf.

Legyen $(q_1,\dots,q_n)$ egy koordináta-rendszer Q-n és legyen $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ a hozzá tartozó koordináta-rendszer T^*Q-n, tehát $p_i(dq_j)=\delta_{ij}$. Ekkor a fenti (4) definíció a

$$\theta=\sum_{i=1}^n p_i dq_i$$

lokális alakot ölti.

Ha tehát $\omega = d\theta$ egyenlettel definiáljuk az ω differenciálható 2-formát, akkor

$$\omega=\sum_{i=1}^n dp_i\wedge dq_i$$

lokális alakot ölti, és így ω valóban egy szimplektikus forma.

Ha $Q=\mathbb{R}^n$ akkor $\mathbb{R}^{2n}=T^*\mathbb{R}^n$ mellett visszanyerjük a standard modellt.

3. Vizsgáljuk meg mely S^{2n} gömbök lehetnek szimplektikus sokaságok! Tegyük fel, hogy $\omega\in\Omega^2(S^{2n})$ egy szimplektikus forma. Mikor $n\neq 2$, akkor az Etesi-előadás (4) formulájából $H^2_{DR}(S^{2n})=0$ és így létezik $\theta\in\Omega^1(S^{2n})$ szimplektikus potenciál, tehát hogy $d\theta=\omega$. Azonban ω sehol nem elfajuló, ami azt jelenti, hogy $\omega^n=\underbrace{\omega\wedge\ldots\wedge\omega}_{n}$ egy sehol nem eltünő csúcs-forma, és emiatt S^{2n}-en vett integrálja nem nulla, tehát:

$$0\neq\int_{S^{2n}}\omega^n=\int_{S^{2n}}(d\theta)^n=\int_{S^{2n}}d(\theta\wedge(d\theta)^{n-1})=0$$

Stokes tételéből. Ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy $n>1$ esetén S^{2n} nem szimplektikus sokaság! Érvelésünk általában azt mutatja, hogy egy kompakt szimplektikus sokaság második De Rham kohomológia csoportja nem triviális.

Mikor $n=1$ akkor viszont rengeteg szimplektikus forma van S^2-n. Ugyanis minden sehol nem eltünő differenciál 2-forma definiál egyet. Ilyenből pedig rengeteg van, hiszen S^2 irányítható. Ugyanez az argumentum mutatja, hogy minden irányítható felületen rengeteg sok szimplektikus struktúra van.

Definíció. Legyen $f: M^{2n}\to\mathbb{R}$ sima függvény az (M^{2n},ω) szimplektikus sokaságon. Ekkor $df\in\Omega^1(M)=\Gamma(M,T^*M)$ differenciálható 1-forma definiál egy $X_f=(\omega^\#)^{-1}(df)$ vektormezőt, az f függvény Hamilton-féle vektormezőjét, ahol az $\omega^\#: TM\to T^*(M)$ izomorfizmust az $\omega\in\Omega^2(M)=\Gamma(M,\Lambda^2T^*M)\subset\Gamma(M,T^*M\otimes T^*M)$ sehol nem elfajuló forma definiálja.

Megjegyzés. Lokálisan egy $(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n)$ koordináta-rendszerben

$$X_f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

formulával adott. Ezért egy $\gamma: I\to M$ sima görbe mentén pontosan akkor teljesülnek a

$$\dot{p_i}=-\frac{\partial f}{\partial q_i}$$
$$\dot{q_i}=\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

Hamilton-egyenletek, ha teljesül a koordináta független $\dot\gamma(t)=X_f(\gamma(t))$ egyenlet!

Definíció. Két $f,g\in C^\infty(M)$ sima függvény *Poisson-zárójele* az

$$\{f,g\}=X_f(g)$$

sima függvény.

Megjegyzés. Lokális koordinátákban

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

A Poisson-zárójel tulajdonságai: • antikommutatív: $\{f,g\} = -\{g,f\}$

- teljesíti a Jacobi azonosságot:

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.$$

Tehát a Poisson-zárójel egy Lie-algebra struktúrát definiál $C^\infty(M)$-n. Az

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g] \tag{5}$$

azonosság pedig azt mutatja, hogy az $f \mapsto X_f$ egy Lie-algebra-homomorfizmus.

2.3.4 A Hamilton-féle mechanikai rendszer definíciója

Miután kidolgoztuk a szükséges szimplektikus geometriai fogalmakat, definiálhatjuk a Hamilton-féle mechanikai rendszert:

Definíció. Egy Hamilton-féle (autonóm) mechanikai rendszer

- *fázistere* egy (M^{2n},ω) szimplektikus sokaság,
- *Hamilton-függvénye* egy $H : M^{2n} \to \mathbb{R}$ sima függvény,
- *Hamilton-féle vektormezője* $X_H \in \Gamma(M,TM)$,
- *mozgása* egy olyan $\gamma : \mathbb{R} \to M^{2n}$ sima görbe, amelyre teljesül a rendszer
- *Hamilton-egyenlete:*

$$\dot{\gamma} = X_H. \tag{6}$$

Példa. Az 2.3.1 fejezetben elmagyaráztuk, hogyan Legendre-transzformálhatjuk az Euler-Lagrange-egyenletet a Hamilton-egyenletbe $\mathbb{R}^n$ konfigurációs téren. Ha ezt a definíciót lokálisan megtartjuk, akkor a Legendre-transzformáció egy M konfigurációs terű $L : TM \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvényű Lagrange-féle mechanikai rendszert egy T^*M fázisterű[9] $H : T^*M \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvényű Hamilton-féle mechanikai rendszerbe viszi, amelynek Hamilton-egyenlete lokálisan (3), globálisan (6) alakú.

A közönséges differenciál egyenletek alaptételéből következik, hogy egy X vektormező lokálisan generál egy egy-paraméteres ϕ_X^t diffeomorfizmus csoportot, – az M diffeomorfizmus csoportjának, egy $t \in I \subset \mathbb{R}$-vel paraméterezett részcsoportját – amelyre $(\frac{d}{dt}\phi_X^t)_{t=0} = X$. Ha X_H egy H Hamilton-függvényhez tartózó vektormező, akkor $\phi_{X_H}^t$ neve *fázisáram.* Az elnevezést az indokolja, hogy egy Hamilton-féle mechanikai rendszer esetén a fázisáram explicite leírja az egész rendszer dinamikáját, amennyiben az $m \in M$ pontból a rendszer t idő múlva az $\phi_{X_H}^t(m)$ pontba kerül.

Definíció. Egy (M^{2n},ω) fázisterű $H : M^{2n} \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvényű Hamilton-féle mechanikai rendszer egy *első integrálja* (vagy *megmaradó mennyisége*) az $f : M^{2n} \to \mathbb{R}$ sima függvény, amely invariáns az X_H által generált $\phi_{X_H}^t$ fázisárammal szemben, azaz ha $X_H f = 0$.

6. Következmény. *Egy $f : M^{2n} \to \mathbb{R}$ sima függvény akkor és csak akkor a rendszer egy első integrálja, ha $\{f,H\} = X_H f = 0$.*

[9] A standard szimplektikus struktúrával. Vö (4).

Példa. 1. A Poisson-zárójel antikommutativitásából következik, hogy $\{H, H\} = 0$, azaz H a rendszer első integrálja, azaz az energia megmarad. Ez az energia megmaradás elve.

2. A Jacobi azonosságból következik, hogy az első integrálok $(C^\infty(M), \{,\})$ egy rész-Lie-algebráját alkotják, azaz ha f és g első integrál, akkor $\{f, g\}$ is első integrál.

7. Tétel. **[Liouville]** *Tekintsünk egy $H : M^{2n} \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvényű hamiltoni rendszert. Legyen $F_1 = H$. Ha $F_1, \ldots, F_n \in C^\infty(M)$ n független[10] első integrál és $\{F_i, F_j\} = 0$ minden i, j-re, akkor a rendszer* teljesen integrálható*, azaz a Hamilton-egyenlet "explicite" megoldható*[11].

Megjegyzés. E tétel jelentőségét mutatja, hogy a dinamika lényegében minden megoldott rendszere valójában teljesen integrálható hamiltoni rendszer.

[10] Azaz $(dF_1)_x, \ldots, (dF_n)_x \in T_x^*M$ lineárisan független minden $x \in M$ pontban.

[11] A pontos megfogalmázást ld. [Arn] 259-260. oldalán.

3 Szimplektikus sokaságok geometriai kvantálása

Az előző alfejezetekben láttuk, hogy a klasszikus mechanika hamiltoni modelljét a szimplektikus geometria matematikai apparátusa alapozza meg. A geometriai kvantálás feladata, hogy a klasszikus mechanikáról kvantummechanikára való áttérést szimplektikus geometriai módszerekkel valósítsa meg. A következő táblázat a hamiltoni klasszikus illetve kvantummechanika matematikai modelljét hasonlítja össze.

hamiltoni	Klasszikus mechanika	Kvantummechanika
fázis- ill. állapottér	(M, ω) szimplektikus sokaság	$P(\mathcal{H})$ projektivizált Hilbert-tér
megfigyelhető mennyiség	$f : M \to \mathbb{R}$ sima függvény	$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ szimmetrikus operátor
Hamilton-függvény ill. operátor	$H \in M \to \mathbb{R}$ sima függvény	$H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ szimmetrikus operátor
mozgás	X_H hamiltoni vektormező generálta fázisáram	e^{itH} időfejlesztő operátor generálta időfejlődés

Dirac általános kvantálási szabályai: A kvantálás egy egységelemes valós Lie-algebra-homomorfizmus a klasszikus megfigyelhető mennyiségek $(C^\infty(M), \{,\})$ Lie-algebrájáról a kvantumos megfigyelhető mennyiségek $(\mathcal{O}, i[,])$ Lie-algebrájába. Más szóval minden $f : M \to \mathbb{R}$ sima függvényhez, azaz klasszikus megfigyelhető mennyiséghez egy $\hat{f} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ szimmetrikus operátort, azaz kvantumos megfigyelhető mennyiséget rendelünk, úgy hogy teljesül a következő három axióma:

(Q1) $f \mapsto \hat{f}$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris

(Q2) ha $f = c$ konstans függvény akkor $\hat{f} = c1_{\mathcal{H}}$

(Q3) ha $\{f_1, f_2\} = f_3$ akkor $\left[\hat{f}_1, \hat{f}_2\right] = i\hat{f}_3$

Megjegyzés. 1. Minthogy a pozició és impulzus koordinátákra teljesül, hogy $\{q_i, p_i\} = 1$ a (Q2) és (Q3) axióma azonnali következménye a $[\hat{q}_i, \hat{p}_i] = i1_H$ Heisenberg-féle határozatlansági reláció.

2. Nem minden (Q1), (Q2) ill. (Q3) axiómát teljesítő ábrázolás tekinthető fizikiailag ésszerű kvantummechanikai rendszernek. Baj, ha a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér "túl nagy" illetve ha bizonyos esetekben az ábrázolás reducibilis.

3.1 Előkvantálás

Egy (M^{2n}, ω) szimplektikus sokaság *Liouville-féle térfogati formá*ja az $\nu = \frac{\omega^n}{n!}$ differenciál csúcs-forma, azaz $2n$-forma. Minthogy ω sehol nem elfajuló ν sehol nem tűnik el. Lokálisan egy kanonikus koordinátarendszerben $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ tehát

$$\nu = dq_1 \wedge \dots dq_n \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n.$$

Az előkvantalás Hilbert-tere az

$$\mathcal{H} = L^2(M) = \left\{\psi : M \to \mathbb{C}; \int_M |\psi|^2 < \infty\right\},$$

ahol a skalárszorzat a

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \int_M \psi \overline{\psi'} \nu$$

definícióval adott.

Az (5) azonosságból látjuk, hogy az

$$\hat{f}(\psi) \mapsto iX_f \psi$$

hozzárendelés teljesíti (Q3)-at és triviálisan teljesíti (Q1)-et. Azonban nyilván $\hat{f}(c) = 0$, tehát (Q2) nem teljesül. Hogy (Q2) teljesüljön modosítsuk az előző probálkozást:

$$\hat{f}(\psi) = iX_f(\psi) + f\psi.$$

Ez mostmár teljesíti (Q2)-t és persze (Q1)-et. Most viszont (Q3) romlott el. Hogy (Q3)-at újra igazzá tegyük úgy, hogy közben (Q1) és (Q2) ne romoljon el, becsempészünk egy újabb tagot a képletbe:

$$\hat{f}(\psi) := i\left[X_f(\psi) + 2\pi i(\theta(X_f))\psi\right] + f\psi = i(d\psi + 2\pi i\psi\theta)(X_f) + f\psi \tag{7}$$

ahol $d\theta = \omega$ szimplektikus potenciál.

Ezzel a definícióval több probléma is van. Először is nem mindig létezik globálisan definiált szimplektikus potenciál M-en. Valóban, ha M kompakt, ω nem nulla kohomológia-osztályt reprezentál, azaz nem létezik szimplektikus potenciál. Ha viszont létezik szimplektikus potenciál, akkor meg nem egyértelmű. Mindkét problémát megoldhatja, ha észrevesszük, hogy a fenti hozzárendelésben megjelenő $d + 2\pi i\theta$ operátor pontosan egy komplex vonalnyalábon adott, $2\pi i\theta$ konnexió mátrixú, ∇ konnexió lokális alakjával egyezik meg[12], míg a $d\theta = \omega$ feltétel e konnexió görbületére a $F_\nabla = 2\pi i d\theta = 2\pi i\omega$ feltétellel ekvivalens. A fenti észrevételek a következő tétellel foglalhatók össze:

8. Tétel. [Az előkvantálás alaptétele.] *Tegyük fel, hogy az (M, ω) szimplektikus sokaságon adva van egy $L \to M$ hermitikus*[13] *vonalnyaláb és egy ∇ konnexió L-en, úgy hogy $F_\nabla = 2\pi i\omega$. Ekkor a*

$$\mathcal{H}_L = \left\{ L \text{ négyzetesen integrálható szelései a } (s, s') = \int_M \langle s, s'\rangle \nu \text{ skalárszorzattal} \right\}$$

Hilbert-tér illetve a

$$C^\infty(M) \ni f \mapsto \hat{f}: \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_L & \to & \mathcal{H}_L \\ s & \mapsto & i\nabla_{X_f} s + fs \end{array}$$

definícióval adott hozzárendelés kielégíti Dirac (Q1), (Q2), (Q3) kvantálási szabályait.

Definíció. Az (M, ω) szimplektikus sokaság *kvantálható*, ha létezik az előző tételbeli (L, ∇) pár, melynek neve: *előkvantáló nyaláb.*

Megjegyzés. A Chern-Weil elméletből következik[14], hogy

$$\left[\frac{1}{2\pi i} F_\nabla\right] = c_1(L) \in \operatorname{im}(H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{R})).$$

Azaz ha egy (M, ω) szimplektikus sokaság kvantálható, akkor

$$[\omega] \in \operatorname{im}(H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{R}))$$

egy egész kohomológia-osztályt reprezentál.

Megmutatható, hogy ez az állítás egyszeresen összefüggő sokaságra visszafelé is igaz, azaz:

9. Tétel. *Egy (M, ω) egyszeresen összefüggő szimplektikus sokaság akkor és csak akkor kvantálható, ha ω egész kohomológia-osztályt reprezentál, azaz $[\omega] \in \operatorname{im}(H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{R}))$.*

Példa. Legyen Q sima sokaság és tekintsük a (T^*Q, ω) szimplektikus sokaságot (Vö. (4)). Ekkor létezik egy kanonikus globális szimplektikus potenciál, mégpedig a θ Liouville 1-forma. Ezért választhatjuk a triviális $L = M \times \mathbb{C}$-et komplex vonalnyalábot és $\nabla = d + 2\pi i\theta$. Ekkor $F_\nabla = 2\pi i d\theta = 2\pi i\omega$, tehát (M, ω) kvantálható és (L, ∇) egy előkvantáló nyaláb. Ha most $Q = \mathbb{R}^n = (q_1, \ldots, q_n)$ akkor $\mathcal{H}_L = L^2(\mathbb{R}^{2n})$ és $\hat{p}_i = -i\frac{\partial}{\partial q_i}$ illetve $\hat{q}_i = -i\frac{\partial}{\partial p_i} + q_i$. Látjuk, hogy a Hilbert-tér "túl nagy", azaz a hullamfüggvények nem csak a poziciótól, hanem az impulzustól is függnek.

A következőkben a fenti (illetve más, itt nem részletezett) problémák megoldásaképpen csak olyan hullámfüggvényeket fogunk tekinteni, amelyek nem függenek az impulzus koordinátáktól, azaz konstansok a kotangens tér irányában. Minthogy koordináta függetlenül szeretnénk dolgozni, be kell vezetnünk a polarizáció fogalmát.

[12] Lásd Etesi-előadás (18).
[13] Azaz egy komplex vonalnyaláb egy a fibrumokon simán változó hermitikus formaval. Vö Matolcsi-előadás 3.2.
[14] Lásd Etesi-előadás 32. oldal.

3.2 Polarizációk

Definíció. Egy $D \subset TM$ k rangú résznyaláb neve: *k-altér-disztribúció*. Egy $D \subset TM$ altér disztribúció *integrálható*, ha $X, Y \in \Gamma(M, D)$ esetén $[X, Y] \in \Gamma(M, D)$.

Példa. 1. Egy 1-altér disztribúció mindig integrálható, hiszen $[,]$ antikommutatív.

2. Egy M sokaság k-dimenziós diszjunkt részsokaságokkal történő lefedése egy *rétegezés*, ha lokálisan ez az előállítás $\mathbb{R}^n$ párhuzamos k-dimenziós affin altereivel történő fedéssel ekvivalens. A rétegezésben résztvevő részsokaság neve: *levél*. A levelek érintő terei egy k-altér-disztribúciót határoznak meg. Sőt könnyen látható, hogy ez a disztribúció integrálható. Megmutatható, hogy ez fordítva is igaz, tehát egy disztribúció akkor és csak akkor integrálható, ha egy rétegezéshez tartozik.

3. Egy fibrált nyaláb teljes terét a fibrumok rétegzik. Íflsgy például a T^*M koérintő nyaláb teljes terét a koérintő terek rétegzik és így a levelek érintőterei egy D n-altér-disztribúciót definiálnak. Vegyük észre, hogy ω, a kanonikus szimplektikus forma, teljesíti az $\omega_x|_{D_x} = 0$ feltételt, más szóval $D_x \subset T_x(T^*M)$ egy Lagrange-altér[15].

A következő definíció ezt a rétegezést általánosítja koordináta-független módon tetszőleges szimplektikus sokaságra.

Definíció. Egy (M^{2n}, ω) szimplektikus sokaság egy $P \subset TM$ n-altér-disztribúciója egy *polarizálás*, ha P integrálható és minden $x \in M$ pontra $\omega_x|_{P_x} = 0$, vagyis $P_x \subset T_xM$ Lagrange-altér.

Egy polarizáció *teljesen integrálható* egy $H : M \to \mathbb{R}$ Hamilton-fügvényre nézve, ha $X_H \in P$.

Megjegyzés. Ha a P polarizáció teljesen integrálható a H Hamilton-fügvényre nézve, akkor a Hamilton-egyenletet elméletileg meg tudjuk oldani. Ugyanis ez esetben a mozgás a polarizáció generálta rétegezés levelein történik. Egy levélen pedig megmutatható, hogy a mozgás "lineáris" egy kanonikusan definiálható lapos torziómentes konnexióra nézve (Vö. [Wood].).

Példa. 1. A fent definiált disztribúció T^*M-en tehát nyilván egy polarizálás. Ha azonban a $H : T^*M \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvény egy természetes Lagrange-féle mechanikai rendszer Lagrange-fügvényének Legendre-transzformáltja, akkor H mindig függeni fog az impulzus koordinátáktól, és így X_H sohasem csak koérintő irányú[16], azaz a polarizáció nem teljesen integrálható.

Előfordul azonban, hogy egy másik polarizáció teljesen integrálható lesz H-ra nézve, és akkor a dinamikai probléma elméletileg megoldható.

2. Legyenek $H = F_1, F_2, \ldots, F_n$ egy teljesen integrálható hamiltoni rendszer lineárisan független páronként involucióban álló első integráljai (Lásd 7. Tétel). Ekkor könnyen láthatóan az $F = (F_1, \ldots, F_n) : M \to \mathbb{R}^n$ leképezés szintfelületei egy H-ra nézve teljesen integrálható polarizációt definiálnak. Tehát a 7. Liouville-tétel speciális esete a fenti megjegyzésnek.

Definíció. Legyen $P \subset TM$ egy polarizáció, (L, ∇) egy előkvantáló nyaláb az (M, ω) szimplektikus sokaságon. Ekkor egy $s \in \Gamma(M, L)$ szelés *polarizált*, ha $\nabla_X s = 0$ minden $X \in \Gamma(M, P) \subset \Gamma(M, TM)$.

Megjegyzés. Lokálisan léteznek polarizált szelések, lévén $F_\nabla = 2\pi i\omega$ és $\omega|_{P_x} = 0$ tehát a ∇ konnexió görbülete 0 a levelek irányában.

A kvantálás terve: Legyen $\mathcal{H}_P$ az L előkvantáló nyaláb L^2 széléseinek Hilbert-tere. Ezt a teret tekintjük a kvantálás Hilbert-terének. Megmutatható, hogy ez esetben $\hat{f}(\mathcal{H}_P) \subset \mathcal{H}_P$ akkor és csak akkor, ha f megőrzi P-t, azaz $X_f \in \Gamma(M, P)$. Sajnos $\mathcal{H}_P$ triviális P valós polarizálás esetén. Ahelyett, hogy ezt a problémát megoldanánk valós polarizációkra[17] , bevezetjük a Kähler-polarizáció fogalmát és megmutatjuk, hogy ez esetben a fenti terv nagyon szépen működik.

[15] Vö. Matolcsi-előadás 2.3.
[16] Más szóval a pozició sohasem megmaradó menyiség.
[17] A probléma megoldásáért lásd [Wood]-t.

3.3 Komplex sokaságok

Definíció. Legyen V n-dimenziós valós vektortér.

- A $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, azaz $V_{\mathbb{C}} = \{X + iY | X, Y \in V\}$ komplex vektortér a V *komplexifikált vektortere.*
- Ha $Z = X + iY \in V_{\mathbb{C}}$, akkor a *konjugált vektor* a $\overline{Z} = X - iY$.
- Ha $W \subset V_{\mathbb{C}}$ komplex altér, akkor $\overline{W} = \{\overline{Z} | Z \in V_{\mathbb{C}}\}$ a konjugált altér.

Megjegyzés. Ha J egy komplex struktúra V-n, akkor tekinthetjük $V_{\mathbb{C}}$

$$P_J = \{J(X) + iJ(Y) = iX - Y\}$$

komplex alterét. Könnyen látható, hogy $P_J \times \overline{P_J} = V_{\mathbb{C}}$ (azaz $P \subset \overline{P} = 0$ és P_J n-dimenziós). Könnyen megmutatható, hogy ez igaz fordítva is:

10. Lemma. *Létezik egy egy-egy értelmű megfeleltetés a V-n adott J komplex struktúrák és a $P \times \overline{P} = V_{\mathbb{C}}$ tulajdonságú $P \subset V_{\mathbb{C}}$ komplex alterek között.*

Definíció. Egy $(T_x M, J_x)$ x-ben simán változó komplex struktúra M-en egy *majdnem komplex* struktúrát definiál.

Példa. Az $\mathbb{R}^{2n}$-en adott konstans J komplex struktúrát, amely minden érintő téren a kanonikus komplex struktúrát adja, a komplex sokaságok standard modelljének nevezzük.

Definíció. Egy (M, J) majdnem komplex struktúra *integrálható*, ha minden pont valamely környezete izomorf[18] a standard modell egy nyílt résszével.

Megjegyzés. Tekintsünk két környezetet, amelyek izomorfok a standard modell egy nyílt részével. Ekkor az ezekhez a térképekhez tartozó $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ áttérési függvény teljesíti, hogy

$$T_\phi(JX) = JT_\phi(X) \tag{8}$$

minden $X \in T\mathbb{R}^{2n}$ érintő vektormezőre. Legyen $\mathbb{R}^{2n}$ standard koordinátái $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ és így $J\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$. Legyen ebben a koordináta-rendszerben $\phi = (\phi_{x_1}, \ldots, \phi_{x_n}, \phi_{y_1}, \ldots, \phi_{y_n})$.Ily módon látható, hogy (8) a $\frac{\partial}{\partial x_i}$ érintővektormezőre alkalmazva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{x_j}}{\partial x_i} &= \frac{\partial \phi_{y_j}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \phi_{x_j}}{\partial y_i} &= -\frac{\partial \phi_{y_j}}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{9}$$

úgynevezett *Cauchy-Riemann egyenletek*be megy át.

Könnyen látható, hogy ez a gondolatmenet igaz visszafelé is, tehát, ha egy sokaságon adva van egy atlasz, ahol az áttérési fügvényekre teljesülnek a fenti (9) Cauchy-Riemann egyenletek, akkor az egyértelműen definiál egy integrálható komplex struktúrát M-en.

Definíció. Egy M $2n$-dimenziós differenciálható sokaság egy n-dimenziós komplex sokaság, ha lokálisan homeomorf $\mathbb{C}^n$ egy nyílt részhalmazával, és adott egy atlasz, melyben a $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ áttérési függvények holomorfak.

Megjegyzés. Minthogy egy függvény pontosan akkor holomorf, ha teljesíti a Cauchy-Riemann egyenleteket, látjuk, hogy az n-dimenziós komplex sokaság nem más mint egy $2n$-dimenziós sima sokaság integrálható komplex struktúrával.

[18] Más szóval: majdnem komplex struktúrát tartóan diffeomorf.

Példa. 1. $\mathbb{C}^n$ nyilvánvalóan egy n-dimenziós komplex sokaság.

2. Legyen $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ ahol az $\sim$ ekvivalencia reláció a

$$(x_0, x_1, \ldots, z_n) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1, \ldots \lambda z_n)$$

minden $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definícióval adott. A $\mathbb{C}P^n$ tér neve: *komplex projektív tér.* Könnyen láthatóan $\mathbb{C}P^n$ egy n-dimenziós kompakt komplex sokaság.

Például $n = 1$ esetén $\mathbb{C}P^1$ az ún. *Riemann gömb*, ami egyébként az egyetlen komplex struktúra S^2-n.

Definíció. Egy $f : M \to N$ leképezés komplex sokaságok között holomorf, ha tetszőleges térképekre áttérve, holomorf (azaz a Cauchy-Riemann egyenleteket kielégítő) függvényt kapunk.

Egy $M^k \subset N^n$ részhalmaz egy komplex részsokaság, ha M^k egy komplex sokaság, az $i : M^k \to N^n$ beágyazás egy holomorf beágyazás, azaz, ha $M^k \subset N^n$ lokálisan $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$-ként térképezhető.

A következő tétel azt mutatja, hogy $\mathbb{C}P^n$ komplex geometriája igazából algebrai geometria.

11. Tétel. **[Chow]** *$\mathbb{C}P^n$ egy M kompakt komplex részsokasága* algebrai *sokaság is, tehát polinomiális egyenletekkel írható le. Ez esetben M neve: projektív varietás.*

Definíció. Legyen E és M komplex sokaság és $\pi : E \to M$ holomorf. Ha π minden $p \in M$ pont körül $p \in U \subset M$ lokálisan $U \times \mathbb{C}^n \to U$ alakú, és a trivializációkat holomorf áttérési függvények kötik össze, akkor π egy *holomorf vektornyaláb.*

Egy $\pi : E \to M$ holomorf vektornyaláb szelése egy olyan $s : M \to E$ holomorf leképezés, amelyre $pr_M \circ s = id_M$. A holomorf szelések egy komplex vektorteret alkotnak, amit $H^0(M, E)$-vel jelölünk.

Példa. 1. Triviális vektornyaláb: $pr_M : M \times \mathbb{C}^n \to M$, ahol $M \times \mathbb{C}^n$ a szorzat komplex sokaság, míg pr_M a holomorf projekció M-re.

A trivialis nyaláb szelését azonosíthatjuk egy $s : M \to \mathbb{C}^n$ holomorf leképezessel. Mikor $r = n$ ez épp egy holomorf függvény M-en. Kompakt komplex sokaságok alapvető tulajdonsága, hogy rajtuk csak a konstans fügvények holomorfak. Ez a komplex analízis maximum-elvéből vezethető le. Ez a tulajdonság lényegesen különbözik a sima fügvényeknél megszokottól, hiszen egy kompakt differenciálható sokaságon temérdek sok sima fügvény definialható.

2. Legyen $H = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}/\sim$, ahol az $\sim$ ekvivalencia reláció a

$$((z_0, z_1, \ldots, z_n), z) \sim ((\lambda z_0, \lambda z_1, \ldots, \lambda z_n), \lambda z_n)$$

formulával adott minden $\lambda \in \mathbb{C}^*$ esetén. Megmutatható, hogy ez egy komplex sokaság és, hogy a projekció az első faktorra ad egy $H \to \mathbb{C}P^n$ holomorf vonalnyalábot. Ezt a vonalnyalábot *hipersík-nyaláb*nak nevezzük.

Meggondolható, hogy a hipersík-nyaláb szelései azonosíthatóak $f : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorf leképezésekkel, melyekre $f(\lambda z) = \lambda f(z)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}^*$ esetén, amiből pedig következik, hogy f egy lineáris függvény. Emiatt $H^0(\mathbb{C}P^n, H) = (\mathbb{C}^{n+1})^*$ egy $n+1$-dimenziós vektortér.

3.3.1 Cauchy-Riemann operátor

Legyen adva az M sima sokaságon egy integrálható komplex struktúra, J. Ekkor J definiálja a komplexifikált érintőnyaláb egy $P_J \subset T_\mathbb{C} M = TM \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ résznyalábját, úgy hogy $P_J \oplus \overline{P_J} = T_C M$. Szokás $T^{1,0}_\mathbb{C} M$-el jelölni P_J-t és $T^{0,1}_\mathbb{C} M$-vel jelölni ennek $\overline{P_J}$ konjugáltját. Azaz a komplex struktúra definiál egy

$$T_C M = T^{1,0}_\mathbb{C} M \oplus T^{0,1}_\mathbb{C} M$$

felbontást. Továbbá jelöljük $\Lambda^{1,0}(M)$-el $T^{1,0}_\mathbb{C} M$ duálisát illetve $\Lambda^{0,1}(M)$-el $T^{0,1}_\mathbb{C} M$ duális vektornyalábját. Ily módon nyerjük

$$T^*_\mathbb{C} M = \Lambda^1(M) = \Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{0,1}(M)$$

felbontását, szelésekre attérve a

$$\Omega^1_\mathbb{C}(M) = \Omega^{1,0}(M) \oplus \Omega^{0,1}(M) \tag{10}$$

felbontást nyerjük.

Most pedig tekintjük a $d_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{\infty}_{\mathbb{C}}(M) \to \Omega^1_{\mathbb{C}}(M)$ leképezést a d külső differenciál-operátor komplexifikáltját. A (10) felbontást használva a $d_{\mathbb{C}}$ operátort előállíthatjuk, mint két operátor, $\partial : \mathbb{C}^{\infty}_{\mathbb{C}}(M) \to \Omega^{1,0}(M)$ és $\overline{\partial} : \mathbb{C}^{\infty}_{\mathbb{C}}(M) \to \Lambda\Omega^{0,1}(M)$ összegét. Tehát

$$d_{\mathbb{C}} = \partial + \overline{\partial}.$$

A $\overline{\partial}$ operátor neve *Cauchy-Riemann operátor.* Az elnevezés onnan származik, hogy az $\overline{\partial} f = 0$ egyenlet a Cauchy-Riemann egyenlet függvényekre. Hogy ezt lokális koordinátákban is lássuk, legyenek $(z_1, \ldots, z_n)$ holomorf koordináták[19] M-en. Ekkor $\Lambda^{1,0}(M)$ bázisa $dz_1, \ldots, dz_n$, míg $\Lambda^{0,1}$ bázisa $d\overline{z_1}, \ldots \overline{z_n}$ lesz. Ily módon látjuk, hogy

$$df = (\partial + \overline{\partial})f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_i}} d\overline{z_i}.$$

Azaz

$$\overline{\partial} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z_i}} d\overline{z_i}$$

a Cauchy-Riemann operátor lokális alakja, a Cauchy-Riemann egyenlet pedig az ismerős,

$$\overline{\partial} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_i}} d\overline{z_i} = 0$$

alakot nyeri lokálisan. A Cauchy-Riemann operátor jelentősége pedig abban rejlik, hogy $\overline{\partial} f = 0$ akkor és csak akkor, ha f holomorf.

3.4 Kähler-sokaságok

Definíció. Legyen M sima sokaság, ekkor egy x-ben simán változó $(T_x M, J_x, \omega_x, g_x)$ kalibrált komplex struktúra[20] egy *majdnem Kähler-struktúra* M-en.

Ha továbbá mind a majdnem szimplektikus mind a majdnem komplex struktúra integrálható, akkor a Kähler-struktúra is integrálható. Ez esetben M neve *Kähler-sokaság* és ω a *Kähler-forma.*

Megjegyzés. Mondhattuk volna egyszerűbben, hogy a Kähler-sokaság az egy szimplektikus és komplex sokaság együtt, úgy hogy a $g(X,Y) = \omega(X, JY)$ bilinearis forma pozitív definit, azaz egy Riemann metrika.

Példa. 1. A legegyszerűbb Kähler-sokaság a $\mathbb{C}^n$ a kanonikus komplex struktúrával a $\sum_{i=1}^{n} i dz_i \wedge d\overline{z_i}$ szimplektikus formával és a $\sum_{i=1}^{n} dz_i \otimes d\overline{z_i}$ Riemann metrikával.

2. Az előző Kähler-struktúrából redukcióval nyerhetjük $\mathbb{C}P^n$-en az úgynevezett *Fubini-Study* Kähler-struktúrát. Az ebből a Kähler-struktúrából származó szimplektikus formára nézve pedig $\mathbb{C}P^n$ kvantálható, és az előkvantáló nyaláb pontosan a hipersík-nyaláb.

3. Kähler-sokaság komplex részsokasága szintén Kähler, hiszen örökli a komplex struktúrát és a Riemann metrikát, amiből látjuk, hogy a szimplektikus forma megszorítása a komplex részsokaságra nem degenerált.

Ebből és az előző példából következik, hogy minden sima projektiv varietás Kähler és hogy a szimplektikus formája kvantálható. Kodaira beágyazási tétele ennek a fordítottját mondja ki:

12. Tétel. [Kodaira beágyazási tétele] *Ha egy kompakt Kähler-sokaság, mint szimplektikus sokaság, kvantálható, akkor beágyazható $\mathbb{C}P^n$-be, tehát projektív varietás.*

[19] A korabbi jelölésben $z_i = x_i + iy_i$

[20] Lásd Matolcsi-előadás 3.3.

3.5 Kähler-polarizáció

Definíció. Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság és jelölje $\underline{\mathbb{C}} = M \times \mathbb{C}$ a triviális komplex vonalnyalábot. Tekintsük a $T_{\mathbb{C}}M = T_M \otimes_{\mathbb{R}} \underline{\mathbb{C}}$ komplexifikált vektornyalábot, amely egy komplex vektornyaláb, mely fibruma a $(T_C M)_p = T_p M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ komplexifikált vektortér.

Ekkor a komplexifikált érintőnyaláb egy $P \subset T_{\mathbb{C}}M$ komplex résznyalábját hívjuk *komplex disztribúció*nak.

Továbbá a $P \subset T_{\mathbb{C}}M$ komplex disztribúció egy *komplex polarizáció*, ha teljesül a következő három feltétel:

1. $P_m \subset (T_{\mathbb{C}}M)_m$ Lagrange-altér,
2. $D_m = P_m \cap \overline{P}_m \cap T_{\mathbb{C}}M$ konstans dimenziós vektortér, azaz $D = P \cap \overline{P} \cap T_{\mathbb{C}}M$ egy komplex disztribúció,
3. P *integrálható*, azaz minden $m \in M$ pont körül léteznek $z_1, \ldots z_n \in C^{\infty}_{\mathbb{C}}(M)$ sima komplex fügvények, hogy $\overline{X_{z_i}}$ feszítik P-t.

Példa. 1. Tekintsünk egy valós polarizálást: $P \subset TM$. Ekkor a komplexifikált disztribúció $P_{\mathbb{C}} \subset T_{\mathbb{C}}M$ könnyen láthatóan egy komplex polarizálást ad. Ez esetben $P_{\mathbb{C}} = \overline{P_{\mathbb{C}}}$, azaz $D = P_{\mathbb{C}} \cap \overline{P_{\mathbb{C}}} = P_{\mathbb{C}}$. Ez visszafelé is igaz, tehát ha egy P' komplex polarizációra $P' = \overline{P'}$, akkor $P' = P_{\mathbb{C}}$ valamely valós polarizáció komplexifikáltja.

2. Egy $P \subset T_{\mathbb{C}}M$ komplex polarizációt, melyre $P \cap \overline{P} = 0$, *pszeudo-Kähler-polarizáció*nak nevezünk. Ez esetben ugyanis $P \oplus \overline{P} = T_{\mathbb{C}}M$, azaz kapunk egy J majdnem komplex struktúrát. A komplex polarizáció definíciójának 3. feltételéből következik, hogy ez egy integrálható komplex struktúra. Így ha a $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ bilinearis forma pozitív definit, akkor egy Kähler-sokaságot kapunk. Ezeket a polarizációkat *Kähler-polarizáció*nak nevezzük. Ez visszafelé is igaz, tehát egy Kähler-sokaság mindig meghatároz egy Kähler-polarizációt. Azaz a Kähler-struktúra ekvivalens a Kähler-polarizációval!

3.6 Kvantálás Kähler-polarizációban

Legyen (M, ω) egy kvantálható szimplektikus sokaság (L, ∇) az előkvantáló nyaláb és legyen $P \subset T_{\mathbb{C}}M$ egy Kähler-polarizáció. Ekkor L egy s sima szelését polarizáltnak nevezzük, ha $\nabla_{\overline{X}} s = 0$ minden $X \in \Gamma(M, P)$-re. Továbbá L polarizált L^2 szeléséit $\mathcal{H}_P \subset \mathcal{H}_L$-vel jelöljük és ebben a polarizálásban a kvantált rendszer Hilbert-terének gondoljuk.

Minthogy a Δ görbülete a levelek irányaban 0, belátható, hogy lokálisan léteznek nem triviális polarizált szelések, azaz az $\nabla s = 0$ egyenlet lokálisan megoldható nem triviális módon. Továbbá, ha s és $s' = \Psi \cdot s$ mindketten polarizáltak, ahol $\Psi \in \mathbb{C}^{\infty}_{\mathbb{C}}(M)$, akkor minden $\frac{\partial}{\partial z_i}$ P-beli vektormezőre

$$0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}} s' = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}} \Psi s = \Psi \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}} s + \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z_i}} \cdot s = \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z_i}} \cdot s,$$

azaz $\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z_i}} = 0$ minden i-re, ami pedig pontosan azt jelenti, hogy Ψ egy holomorf függvény. Ily módon a Kähler-polarizáció indukál egy holomorf struktúrát L-en úgy, hogy L polarizált és holomorf szelései megegyeznek. Így kapjuk meg a geometriai kvantálás végeredményét Kähler esetben:

$$\mathcal{H}_P = H^0(M, L).$$

3.7 Összegzés

Legyen (M, ω) Kähler-sokaság, azaz egy szimplektikus sokaság egy Kähler-polarizációval. Ha mint szimplektikus sokaság kvantálható, akkor tekintjük az (L, ∇) előkvantáló nyalábot, azaz $F_{\nabla} = 2\pi i \omega$ és az ebből nyert $\mathcal{H}_L$ előkvantált Hilbert-teret. Ezek után tekintjük a Kähler-polarizációt és az általa indukált holomorf struktúrát L-en. Majd a kvantálás második lépésében előállítjuk a $\mathcal{H}_P = H^0(M, L)$ Hilbert-teret.

Példa. A $\mathbb{C}P^n$ a Fubini-Study Kähler-polarizációban előkvantálható a H hipersík-nyalábbal, mint előkvantáló-nyalábbal. A végső Hilbert-tér pedig a $H^0(M, H) \cong (\mathbb{C}^{n+1})^*$ tehát egy $(n+1)$-dimenziós vektortér lesz.

4 Jones-Witten elmélet

4.1 Axiómatikus topologikus kvantummező-elmélet

Egy $d+1$-dimenziós topologikus kvantummező-elméletet egy Z hozzárendelés definiál, ami egy nem feltétlenül összefüggő Σ, zárt, kompakt, irányított d-dimenziós sokasághoz egy $Z(\Sigma)$ véges dimenziós hermitikus komplex vektorteret rendel, továbbá egy Y kompakt peremes irányított $d+1$-dimenziós sima sokasághoz, amelynek pereme Σ, egy $Z(Y) \in Z(\Sigma)$ vektort rendel a $Z(\Sigma)$ vektortérben, úgy hogy teljesülnek a következő axiómák

(A1) involutív: $Z(\Sigma^*) = Z(\Sigma)^*$, azaz a megfordított irányítású sokasághoz a duális vektorteret rendeli

(A2) multiplikatív: $Z(\Sigma_1 \dot{\cup} \Sigma_2) = Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2)$, azaz két sokaság diszjunkt uniójához a vektorterek tenzorszorzatát rendeli

(A3) asszociatív: $Y = Y_1 \cup_{\Sigma_2} Y_2$ esetén

$$Z(Y) = Z(Y_2)Z(Y_1) \in Hom(Z(\Sigma_1), Z(\Sigma_2))$$

(A4) $Z(\emptyset) = \mathbb{C}$, azaz az üres d sokaságot egy 1-dimenziós vektortérbe viszi

(A5) $Z(\Sigma \times I) = id_{Z(\Sigma)} \in End(Z(\Sigma))$, tehát a hengerhez az identitás-operátort rendeli

Példa. 1. Első példa képpen megmutatjuk, hogy hogyan értelmezhetjük a hamiltoni kvantummechanikat egy $0+1$-es kvantummező-elméletnek, amely kielégíti a fenti A1-A4 axiómákat, azzal a módosítással, hogy az elmélet 1-dimenziós részében Y-on egy metrikát is megadunk, azaz megmondjuk a szakasz hosszát.

Legyen $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$ a rendszer Hamilton-operátora és $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ a rendszer hullámfüggvényeinek Hilbert-tere. Az elmélet 0-dimenziós része a fentiek szerint egy 0-dimenziós sokasághoz, azaz pontok diszjunkt halmazához kell Hilbert-tereket rendeljen. (A2) szerint azonban elegendő megmondanunk, hogy mi legyen a $Z(pt)$. Válasszuk $Z(pt) = \mathcal{H}$ egy hamiltoni kvantummechanikai rendszer Hilbert-terének. Tekintsünk egy $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumot. Ekkor a kvantummező elméletnek ehhez egy $\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}$-beli elemet, azaz egy $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ homomorfizmust kell rendelnie. Legyen ez a homomorfizmus a $e^{i(t_1-t_0)H}$.

Tehát a hamiltoni kvantummechanika eme modellje kielégíti a fenti (metrikával módosított) A1-A4 axiómákat. Látjuk azt is, hogy A5 ekvilens a $H = 0$ feltétellel. Azaz egy *topologikus* kvantummező-elméletben triviális a dinamika. Fizikus szemmel ez az eset érdektelennek és triviálisnak tűnhet, azonban ahogy a későbbiekben is látni fogjuk, egy topologikus kvantummező-elmélet nagyon nem triviális topológiai tulajdonságokkal rendelkezhet. A legújabb elméleti fizikai kutatások eme topológiai tulajdonságok alapvető fizikai jelentőségét hangsúlyozzák.

2. Könnyen megmutatható, hogy $1+1$-es TKME-k egy-egy értelműn megfelelnek véges dimenziós úgynevezett Frobenius-algebráknak és így könnyen osztályozhatók (érdemes ezen a nem triviális problémán elgondolkodni). Az $1+1$-es elméletek leggyakrabban a Gromov-Witten invariánsok, és a kapcsolódó kvantum kohomológia matematikai elméletében bukkanak fel szuperszimmetrikus szigma-modellek formájában (Lásd Szenes-előadás).

3. $2+1$-es elméletre példa a megkonstruálandó Jones-Witten-elmélet, amelyet Witten 1989-ben dolgozott ki.

4. Witten 1989-ben megmutatta, hogy a 4-sokaságok híres Donaldson-elmélete megérthető egy $3+1$-es TKME keretében. Kiderül, hogy ennek 3-dimenziós része pontosan a szintén az érdeklődés középpontjában lévő úgynevezett Floer homológia! Seiberg és Witten 1994-ben továbbment és tekintette a fenti Donaldson-Witten fizikai elmélet duálisát, amelyet Seiberg-Witten-elméletnek nevezünk. A Seiberg-Witten-elmélet technikailag könyebben kezelhető, mint a Donaldson-elmélet, ennek tudható be, hogy a Seiberg-Witten-elmélet a 4 illetve 3-dimenziós sima sokaságok osztályozásában új fejezetet nyitott. A sok új eredmény közül az egyik talán legérdekesebb a Thom sejtés megoldása, melynek legáltalánosabb formáját Ozsváth Péter és Szabó Zoltán [Oz,Sz] intézte el 1998-ban.

Az alábbiakban a Jones-Witten $2+1$-es TKME-t fogjuk megkonstruálni. Ez az elmélet a fizikusok körökben már ismert, úgy nevezett $SU(2)$-Chern-Simons-elmélet:

Definíció. Az $SU(2)$ -Chern-Simons-elmélet

- *szintje*: egy rögzített k pozitív egész szám,

-*térideje*: egy M kompakt irányított (peremes) 3-sokaság

-*mezői*: A konnexió az M feletti triviális $SU(2)$ principális nyalábon

-egy *mércéje*: a P triviális $SU(2)$ principális nyaláb trivializációja

-*mérce-csoportja*: $\mathcal{G}$, a fenti triviális $SU(2)$-nyaláb összes szelésének, azaz az összes $M \to SU(2)$ sima leképezésnek a csoportja

-*Lagrange-függvénye* egy rögzített mércében: $S(A) = \frac{k}{4\pi}\int_M tr(A \wedge dA) + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A$

Megjegyzés. 1. A Chern-Simons forma $A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A$ egy $su(2)$ Lie-algebra értékű 3-forma, ennek nyoma pedig egy közönséges 3-forma, aminek integrálja egy valós szám. Minthogy a Chern-Simons-hatás definíciójában az A konnexió valamely rögzített mércében szerepel, meg kell vizsgáljuk S mérce-invarianciáját.

Először is tekintsük $\mathcal{A}$-t, az összes konnexió terét az M feletti P triviális $SU(2)$ principális nyalábon. Két konnexió $A_1 - A_2$ különbségét egy $g : M \to SU(2)$ mérce transzformáció $(g^{-1}A_1 g + g^{-1}dg) - (g^{-1}A_2 + g^{-1}dg) = g^{-1}(A_1 - A_2)g$ alakba viszi, és így $A_1 - A_2 \in \Omega^1(M, adP)$ egy $su(2)$ Lie-algebra értékű 1-forma. Ezért $\mathcal{A}$ egy a $\Omega^1(M, adP)$ vektortéren modellezett affin tér. Ezen a téren hat a mérce csoport az $A \mapsto g^{-1}A_1 g + g^{-1}dg$ szabállyal[21].

Most megvizsgáljuk, hogy $g \in \mathcal{G}$ hogyan változtatja meg a Chern-Simons funkcionált:

$$S(A) - S(g^{-1}Ag + g^{-1}dg) =$$

$$= \frac{k}{4\pi}\int_M tr\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A - g^{-1}(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A)g\right) -$$

$$-\frac{k}{4\pi}\int_M \frac{1}{3}tr\left\{(g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}dg)\right\} - \frac{k}{4\pi}\int_M tr d(g^{-1}A \wedge dg),$$

az első tag nulla, hiszen konjugált mátrixok nyoma megegyezik, a harmadik szintén eltűnik Stokes-tételéből, és így

$$S(A) - S(g^{-1}Ag + g^{-1}dg) = \frac{-k}{12\pi}\int_M tr\{(g^{-k}dg) \wedge (g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}dg)\},$$

másrészt megutatható, hogy

$$\frac{1}{24\pi^2}\int_M tr\{(g^{-k}dg) \wedge (g^{-1}dg) \wedge (g^{-1}dg)\},$$

megegyezik a $g : M \to SU(2)$ leképezés fokával és így egy egész szám (Vö Etesi-előadás). Ebből következik, hogy $S(A)$ jól definiált modulo 2π. Ha tekintjük az $\mathbb{R} \to S^1$ $x \mapsto e^{2\pi i x}$ leképezést, akkor látjuk, hogy $S : \mathcal{A} \to S^1$ jól definiált.

2. Ugyanúgy, mint a Lagrange-féle klasszikus mechanikában, csak azok az A mezők lesznek mozgásai a rendszernek, amelyek kritikus pontjai az S Chern-Simons funkcionálnak. Vizsgáljuk meg tehát az S funkcionál egy A kritikus pontját: Legyen $A_t = A + at$ egy egyenes $\mathcal{A}$-ban, ahol $a \in \Omega^1(M, adP)$. Ekkor

$$\begin{aligned} S(A_t) &= \frac{k}{4\pi}\int_M tr\left(A_t \wedge dA_t + \frac{2}{3}A_t \wedge A_t \wedge A_t\right) \\ &= S(A) + \frac{tk}{4\pi}\left\{\int_M tr(F_A \wedge a) + \int_M tr(d(A \wedge A))\right\} + O(t^2) \\ &= S(A) + \frac{tk}{4\pi}\int_M tr(F_A \wedge a) + O(t^2). \end{aligned}$$

Minthogy A kritikus pontja S-nek $\int_M tr(F_A \wedge a) = 0$ minden $a \in \Omega^1(M, adP)$ esetén. Következik, hogy $F_A = 0$. Megmutatható, hogy ez igaz visszefelé is, tehát, A akkor és csak akkor kritikus pontja S-nek, ha lapos, azaz $F_A = 0$.

A következő fejezetben kiszámoljuk a Jones-Witten-elmélet 2-dimenziós részét azaz megkvantáljuk a hamiltoni fázisteret.

[21] Lásd Etesi-előadás (20)

4.2 Az elmélet 2-dimenziós része; hamiltoni formalizmus

Legyen $M = \Sigma \times I$, ahol Σ egy g-génuszú zárt irányítható felület és I az egység-intervallum. Jelölje továbbá P_Σ a Σ triviális $SU(2)$-nyalábot, $\mathcal{A}_\Sigma$ a P_Σ-beli konnexiók affin terét illetve $\mathcal{G}_\Sigma = Map(\Sigma, SU(2))$ az P_Σ mérce transzformáció csoportját.

Ekkor egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ M feletti $SU(2)$-konnexió I irányú komponense, egy megfelelő mércében, eltünik. Emiatt egy M feletti A konnexióra gondolhatunk úgy, mint egy görbére az $\mathcal{A}_\Sigma$ végtelen dimenziós affin térben. Azonban, mint fent láttuk ezek a görbék közül csak azok lesznek a rendszer valódi mozgásai, amelyek az $\mathcal{A}_\Sigma$ egy bizonyos alterére a Σ feletti lapos $SU(2)$-konnexiók alterére vannak korlátozva. Ha

$$\mu : \mathcal{A}_\Sigma \to \Omega^2(\Sigma, adP_\Sigma); \mu(A) = F_A, \tag{11}$$

akkor ez az altér a $\mu^{-1}(0) \subset \mathcal{A}_\Sigma$. Emiatt a Hamiltoni formalizmusban a klasszikus fázistér az $\mathcal{M} = \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_\Sigma$ tér, azaz a Σ feletti lapos $SU(2)$-konnexiók tere modulo mérce transzformációk.

Minthogy egy lapos konnexió holonómiája minden összehúzható görbén 0, ezért egy tetszőleges görbén a holonómia csak a görbe homotópia-osztályától függ. Ily módon megmutatható, hogy egy lapos konnexió egyértelműn leírható egy $\pi_1(M) \to SU(2)$ homomorfizmussal:

13. Tétel. *$\mathcal{M} \cong$ lapos konnexiók P_Σ-n$/\mathcal{G}_\Sigma \cong Hom(\pi_1(\Sigma) \to SU(2))/$konjugálás*

Ez a tétel tehát egy fogalmilag egyszerűbb térrel azonisítja elméletünk fázisterét. Ismeretes, hogy a $\pi_1(\Sigma)$ csoport megadható generátorokkal és relációkkal a

$$\pi_1(\Sigma^g) = \langle A_1, B_1, \ldots A_g, B_g | \Pi_{i=1}^g A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1} = 1 \rangle$$

alakban. Tekintsük az

$$r : (SU(2))^g \times (SU(2))^g \to SU(2)$$

leképezést a

$$r(A_1, B_1, \ldots A_g, B_g) = \Pi_{i=1}^g A_i B_i A_i^{-1}$$

definícióval. Ekkor nyilván

$$\mathcal{M} \cong r^{-1}(1)/SU(2).$$

Ebből az előállításból látjuk, hogy $\mathcal{M}$ kompakt.

Továbba igaz az is, hogy *irreducibilis* reprezentációkhoz[22] tartozó $\mathcal{M}$-beli pontok körül létezik[23] kanonikus sokaság struktúra. Gondolhatunk $\mathcal{M}$-re mint egy szinguláris sokaságra. Ha $g > 1$ akkor az irreducibilis reprezentációk egy sűrű nyílt halmazt alkotnak. A sokaság dimenzióját pedig könnyen kiszámolhatjuk a definíciójából, ugyanis $(SU(2))^g \times (SU(2))^g$ $6g$-dimenziós, így $r^{-1}(1)$ (6g-3)-dimenziós és így $dim(\mathcal{M}) = 6g - 3 - 3 = 6g - 6$.

4.2.1 Szimplektikus struktúra $\mathcal{M}$-en

Tekintsük a végtelen dimenziós $\mathcal{A}$ affin tér érintőterét: $T\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma \times \Omega^1(\Sigma, adP_\Sigma)$. Legyen $a, b \in \Omega^1(\Sigma, adP_\Sigma)$ két érintővektor az $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ pontban. Ekkor definiáljuk az $\tilde{\omega}$ differenciál 2-formát

$$\tilde{\omega}(a, b) = \frac{k}{4\pi} \int_\Sigma -tr(a \wedge b)$$

képlettel. Minthogy a definíció független A-tól így a 2-forma konstans és így $d\tilde{\omega} = 0$, továbbá az is látható, hogy $\tilde{\omega}$ nem degenerált. Ily módon nyerünk egy $(\mathcal{A}, \tilde{\omega})$ végtelen dimenziós szimplektikus teret. Továbbá a $\mathcal{G}_\Sigma$-hatás $\mathcal{A}_\Sigma$-n megörzi ezt a szimplektikus formát, és megmutatható, hogy $\mathcal{M} = \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_\Sigma$ (sima pontjaiban) örököl egy $\omega \in \Omega^2(M)$ szimplektikus formát.

Van tehát egy $(\mathcal{M}, \omega)$ szimplektikus sokaságunk és ezt szeretnénk megkvantálni. Ehhez geometria kvantálást használunk. Kiderül ugyanis, hogy $(\mathcal{M}, \omega)$ kvantálható, azaz létezik rajta (L, ∇) előkvantáló nyaláb, tehát $F_\nabla = 2\pi i\omega$. Ahhoz, hogy a kvantálás második felét végre tudjuk hajtani, szükségünk van

[22] Egy $f : \pi(\Sigma) \to SU(2)$ reprezentáció reducibilis, ha f képe $SU(2)$ egy $U(1)$ részcsoportjába esik, egyébként irreducibilis.

[23] Ennek oka, hogy irreducibilis pontokban r szubmerzió, azaz deriváltja szürjektív.

egy polarizációra $\mathcal{M}$-en. Ehhez felruházzuk Σ-t valamely τ komplex struktúrával, és tekintjük az $\mathcal{A}_\Sigma$ komplexifikált érintőnyalábján adódó

$$T_{\mathbb{C}}\mathcal{A}_\Sigma = \Omega^1_{\mathbb{C}}(\Sigma_\tau, adP_\Sigma) = \Omega^{1,0}(\Sigma, adP_\Sigma) \oplus \Omega^{0,1}(\Sigma_\tau) \tag{12}$$

felbontást. Kiderül, hogy ez egy Kähler-polarizáció és, hogy $\mathcal{G}_\Sigma$ ezt megtartja. Így kapunk egy Kähler-polarizációt $(\mathcal{M}, \omega)$-en. A 3.6 fejezetben leírtak szerint nyerünk egy holomorf struktúrát L-en. Továbbá a geometria kvantálás Hilbert-tere a $\mathcal{H}_P = H^0(\mathcal{M}, L)$ vektortér lesz. A k. szintű elméletben $\mathcal{M}$-en a $k\omega$ szimplektikus formát, illetve az (L^k, ∇) előkvantáló nyalábot tekintve, a fenti (12) komplex struktúra egy P_k Kähler-polarizációt eredményez a $(\mathcal{M}, k\omega)$ szimplektikus sokaságon. A 3.6 fejezet szerint ebben a polarizációban a geometriai kvantálás Hilbert tere a $\mathcal{H}_{P_k} = H^0(\mathcal{M}, L^k)$ komplex vektortér. A továbbiakban rögzítjük k-t.

A fenti konstrukció tehát megad egy véges dimenziós vektorteret minden τ komplex struktúrára Σ-n. Ily módon kapunk egy vektornyalábot a Σ komplex struktúráinak T_Σ terén. T_Σ egy $(3g-3)$-dimenziós komplex sokaság, neve *Teichmüller-tér*. Megmutatható, hogy létezik egy kanonikus (projektíven) lapos konnexió ezen a vektornyalábon és így $H^0(\mathcal{M}_\tau, L^k)$ kanonikusan azonosítható[24] minden τ-ra.

Ezt a vektorteret rendeli Witten [Wit]-ben a Σ irányítható felülethez. Azaz a k. szintű elméletben $Z(\Sigma) = H^0(\mathcal{M}_\tau, L^k)$. Witten arra is rámutat, hogy ez a vektortér megegyezik bizonyos konform mező-elméletbeli úgynevezett *konform blokkokkal*. Ezek dimenzióját pedig a Verlinde-formula adja meg[25] :

$$\dim(Z(\Sigma^g)) = \sum_{j=1}^{k+1} \left[\frac{k+2}{2\sin^2 \frac{j\pi}{k+2}} \right]^{g-1} . \tag{13}$$

Végezetül megemlítjük, hogy ezt a formulát a lapos konnexiók modulusterének geometriájából először Aaron Bertram-nak és Szenes Andrásnak sikerült bizonyítania [Be,Sz] 1993-as cikkükben.

4.3 Az elmélet 3-dimenziós része, lagrange formalizmus

Ahhoz, hogy kiderüljön mi köze a Jones-polinomnak a Chern-Simons-elmélethez relativizálnunk kell a TKME axiómáit. Ahelyett tehát, hogy Σ irányított felületekhez rendelnénk vektortereket, pontjaiban megjelölt felületeket tekintünk. Egy Σ irányított felületet véges sok pontjában egy G kompakt Lie-csoport irreducibilis reprezentációjával megjelölve pontjaiban megjelölt felülethez jutunk; jelben: $(\Sigma, (p_1, R_1) \dots (p_n, R_n))$, ahol $p_i \in \Sigma$ és R_i a G kompakt Lie-csoport egy irreducibilis reprezentációja.

A relativizált elmélet 3-dimenziós részében pedig Y kompakt peremes sokaságokat tekintünk, melyben megjelölünk véges sok irányíott diszjunkt szakaszt (1-dimenziós irányított kompakt részsokaságot) a G kompakt Lie-csoport irreducibilis reprezentációjával. A szakaszok lehetnek zártak és diszjunktak Y peremétől, vagy lehetnek végpontjaik a Y peremén, mely esetben transzverzálisak a peremre. Az új relatív objektumot $(Y; (C_1, R_1), \dots, (C_n, R_n))$-el jelöljük, ahol C_i fenti tipusu szakasz ill. $R_i \in Irr(G)$. Ennek határa egy pontjaiban megjelölt irányított felület lesz. Ily módon természetes módon kiterjeszthetjük a TKME axiómáit a relatív esetre.

A relatív esetben célunk egy módosított TKME axiómákat kielégítő $Z(\Sigma, (p_1, R_1) \dots (p_n, R_n))$ vektortér rendelése, egy pontjaiban megjelölt felülethez illetve egy $Z((Y; (C_1, R_1), \dots, (C_n, R_n)))$ vektor a pereméhez tartozó vektortérben.

A relatív elmélet 2-dimenziós részét a fenti abszolút esethez teljesen analóg módon konstruálhatjuk meg úgy, hogy a Σ feletti lapos konnexiók $\mathcal{M}$ tere helyett a $\Sigma \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ felett tekintünk lapos konnexiókat.

Mikor Y zárt, akkor minden C_i zárt görbe és $Z((Y; (C_1, R_1), \dots, (C_n, R_n)))$ az üres halmazhoz tartozó 1-dimenziós vektortérben ad egy vektort, azaz egy komplex számot. A továbbiakban ezt a komplex számot szeretnénk kiszámolni a Chern-Simons-elméletben.

Definíció. Legyen M zárt irányított 3-sokaság, G egy kompakt Lie-csoport. Továbbá legyen $C \subset M$ egy zárt, irányított, összefüggő 1-dimenziós részsokaság, irányított M-beli zárt görbe. Végezetül legyen R :

[24] Pontosabban csak $P(H^0(\mathcal{M}_\tau, L^k))$ azonisítható ily módon, lévén az elöbb említett konnexió csak projektíven lapos.

[25] Minthogy a baloldalon egy egész szám áll, így a formulából következik, hogy a jobb oldal is egész. Ez önmagában is egy nem triviális állítás.

$G \to GL(n, \mathbb{R})$ egy n-dimenziós irreducibilis reprezentáció. Ekkor az úgynevezett *Wilson-hurok* definíciója:

$$\begin{array}{rrcl} W(C,R): & \mathcal{A} & \to & \mathbb{C} \\ & A & \mapsto & Tr_R(Hol_C(A)), \end{array}$$

azaz tekintjük az A konnexió C görbe menti holonómiáját és vesszük ennek az R reprezentációban adódó nyomát.

Megjegyzés. Gondolhatunk a $W(C,R)$ Wilson-hurokra, mint egy klasszikus mező-elméletbeli megfigyelhető mennyiségre. Fizikus terminológiával a Wilson-hurkot "statikus nem abeli töltésnek" is nevezik.

A Wilson-hurkok és egy Feynman-integrál segítségével könnyen felírhatjuk Witten mindent megvilágító képletét:

$$Z(Y; (C_1, R_1), \ldots, (C_n, R_n)) = \int_{\mathcal{A}} W(C_1, R_1) \cdot \ldots W(C_n, R_n) e^{-iS(A)} \mathcal{D}(A). \tag{14}$$

A jelölés azt érzékelteti, hogy kiintegráljuk $\mathcal{A}$-n valamely $\mathcal{D}$ mérték szerint az intagrandusban megjelenő $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ függvényt. Bár ez a definíció igen elegáns, fő problémája, hogy matematikailag a fenti Feynman-integrál nincsen definiálva. Mindazonáltal a fizikusok heurisztikusan tudnak vele számolni, és így konzisztens eredményekhez vezet. Ez a jelenség emlékeztethet minket a Dirac-delta fügvényre, mellyel sokáig a fizikusok úgy számoltak, hogy nem volt precízen definiálva. Később a Dirac deltát precízen értelmezték disztribúcióként. A Feynman-integrállal, a kvantummező-elméletek napjainkra talán legfontosabb eszközével, is hasonló lehet a helyzet, bár az hogy Feynman már az 1940-es években ezzel számolt és azóta senkinek sem sikerült precíz matematikai alapokra helyeznie arra mutat, hogy a probléma igen nehéz. Az Atiyah-féle axiómatikus TKME egy igen speciális esetben próbálja megkerülni a problémát, a fizikusok által a Feynman-integrálra használt manipulációkat axiómatizálva.

Mielőtt a Jones-Witten-elmélet főtételéhez érünk, emlékeztetünk arra, hogy a Jones-polinomot[26] a következőképpen definiálhatjuk. A triviális irányított csomóra legyen 1 és egy tetszőleges irányított láncra a

$$t^{-1} J_{L_+} - t J_{L_-} - (t^{1/2} - t^{-1/2}) J_{L_0}$$

teljesüljön, ahol L_+ egy rögzített L irányított láncdiagram esetén egy rögzített metszéspont pozitív irányítású metszéspontra való kicseréléséhez tartozó irányított láncdiagram. L_- ugyanennek a metszéspontnak a negatív irányítású metszéspontra való kicseréléséhez tartozó láncdiagram, míg L_0 a metszéspont megszüntetésével előálló láncdiagram.

Végezetül kimondjuk az előadássorozat fő eredményét[27]:

14. Állítás. [Witten] *Legyen $L = C_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} C_n$ egy lánc S^3-ban. Ekkor a k. szintű $SU(2)$-Chern-Simons-elméletben a (14) integrál az L lánc J_L Jones-polinomját számolja a következő értelemben:*

$$Z(S^3; (C_1, R), \ldots, (C_n, R)) = J_L(e^{\frac{2\pi i}{k+2}}),$$

ahol $R : SU(2) \to GL(2, \mathbb{C})$ az $SU(2)$ definiáló reprezentációja.

Megjegyzés. 1. Witten érvelése eme állítás kimondásakor a TKME axiómáin kivül támaszkodik a konform mező-elméletek több eredményére, ezeket itt nem tudjuk ismertetni.

2. Matematikailag precíz formában a Jones-Witten TKME Z funktorát Reshetikhin és Turaev [Re,Tu] konstruálta meg 1991-ben reprezentáció-elméleti módszerekkel. Ily módon kapunk többek között egy zárt 3-sokaság-invariánst az úgy nevezett Reshetikhin-Turaev-Witten invariánst.

3. Már a Reshetikhin-Turaev-Witten invariánsból is ráismerhetünk a fent vázolt Chern-Simons-elméletre. Például a k. szinten $Z(\Sigma \times S^1)$ megegyezik $Z(\Sigma)$ dimenziójával, azaz pontosan a (13) Verlinde-formulát számolja ki, ami, mint fent láttuk előkerül, mint konform blokkok dimenziója, illetve a Σ-n élő lapos konnexiók modulus terének Kähler-polarizációban történő geometriai kvantálás végeredményeként adódó Hilbert-tér dimenziója.

[26] Részletesebb magyarázatért lásd az izgalmas [Rim]-t.

[27] Minthogy ez az eredmény matematikailag nem jól definiált "Tétel" megnevezés helyett "Állításként" hivatkozunk rá.

4.4 További olvasnivaló

A fent vázolt Jones-Witten-elmélet 2-dimenziós részéről [Ati]-ban olvashatunk részletesebben, bár ez nem egy nagyon könnyű könyv, lévén nincsenek benne részletesen definiálva a fogalmak, de eligazításra jól használható.

Kicsit fizikusabb szemszögből, de még mindig közel matematikai precizitással ír a Jones-Witten-elméletről Nash [Nash] könyvében, ahol a kvantummező-elméletek számos más differenciáltopológiai alkalmazását is megtalálhatjuk.

Természetesen a legjobb, bár legnehezebb forrás az eredeti [Wit] cikk, ahol megtalálhatjuk a Jones-Witten-elmélet fizikai hátterét is.

A Reshetikhin-Turaev munkáról és egyéb érdekes csomó- és 3-sokaság-invariánsokról magyarul olvashatunk Rimányi Richárd jól használható [Rim] művében.

Geometriai kvantálásról, amely a szimplektikus geometria napjainkban is élénk területe, olvashatunk a matematikiai fizikus Woodhouse matematikusi igényességű [Wood] könyvében.

Végezetül ne felejtsük ki a magyarul olvasható [Arn]-ot sem, amely a szimplektikus geometriához nyújt kézzelfogható motivációt a klasszikus mechanikán keresztül.

Irodalom

[Arn] V.I. Arnold. *A mechanika matematikai módszerei.* Műszaki könyvkiadó, Budapest 1985

[Ati] M. Atiyah. *Geometry and Physics of knots.* Cambridge University Press 1990

[Do,Kr] S.F. Donaldson, P.B. Kronheimer *The geometry of* 4*-manifolds*, Oxford University Press, 1991

[Gr,Ha] P. Griffiths, J. Harris. *Principles of algebraic geometry.* New York, Wiley 1978

[Nash] C. Nash. *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic Press, London, 1991

[Rim] R. Rimányi. *Csomók és* 3*-sokaságok*, MAFIHE, 1995

[Re,Tu] N. Reshetikhin, V. Turaev. Invariants of three dimensional manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.* **102** (1991) 547-597

[Oz,Sz] P. Ozsváth, Z. Szabó. The symplectic Thom conjecture, (*Ann. of Math.* megjelenés alatt), preprint math.DG/9811087

[Be,Sz] A. Bertram, A. Szenes. Hilbert polynomials of moduli spaces of rank 2 vector bundles. II. *Topology* **32** (1993), no. 3, 599–609.

[Wit] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* **121**, 351-400 (1989)

[Wood] N.M.J. Woodhouse. *Geometric quantization*, Oxford University Press, 2. ed., 1994